Feuille d'exercices # 2

Exercice 1 : *Autour de la notion de martingale*

1. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration (suite croissante de tribus) d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La réunion $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ est-elle toujours une tribu ?
2. Que dire d'une martingale (resp. d'une sous-martingale, d'une surmartingale) par rapport une filtration constante ?
3. Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Pour $n \geq 0$, on note $\mathcal{G}_n = \sigma(M_0, \ldots, M_n)$ la filtration canonique associée à la martingale $(M_n)_{n\geq 0}$. Montrer que la suite $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$.
4. Trouver une suite de variables aléatoires $(M_n)_{n\geq 0}$ avec $\mathbb{E}[|M_n|] < +\infty$ pour tout n et telle que $\mathbb{E}[M_{n+1}|M_n] = M_n$ sans pour autant que $(M_n)_{n\geq 0}$ soit une martingale.

Exercice 2 : *Martingale identiquement distribuée*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale telle que les variables X_n ont toutes même loi.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en fait une martingale, ainsi que $(X_n \vee a)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X_n \wedge a)_{n\in\mathbb{N}}$ où a est un réel fixé.
2. Soient $n > m$ deux entiers et a un réel. Montrer que sur l'ensemble $\{\omega,\ X_m(\omega) \geq a\}$, on a $X_n \geq a$ presque sûrement. En déduire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante presque sûrement.

Exercice 3 : *Martingale multiplicative*
Soient $Y_1, Y_2, \ldots$ des variables aléatoires positives indépendantes et identiquement distribuées et la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $X_0 = 1$ et $X_n := \prod_{i=1}^n Y_i$ pour $n \geq 1$.

1. Sous quelles conditions la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une surmartingale ? Une sous-martingale ? Une martingale ?
2. On se place dans le dernier cas et l'on suppose de plus que $\mathbb{P}(Y_1 = 1) < 1$ et qu'il existe $\delta > 0$ tel que $Y_n \geq \delta$. Montrer qu'alors $\mathbb{E}[\log Y_1] < 0$ et utiliser la loi des grands nombres pour $\log X_n/n$ pour montrer que $\lim_{n\to+\infty} X_n = 0$ presque sûrement.

Exercice 4 : *Marche aléatoire et martingales*
Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées avec $\mathbb{P}(Y_i = 1) = p = 1 - P(Y_i = -1)$. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ et $S_0 = 0$. Montrer que les suites $(W_n)_{n\geq 0}$ et $(M_n)_{n\geq 0}$ définies ci-dessous sont des martingales par rapport à la filtration naturelle des Y_n.

$$W_n := S_n - (2p-1)n, \;\; W_0 := 0, \qquad M_n := \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}, \;\; M_0 := 1.$$

Exercice 5 : *Urne de Pólya*
On dispose (d'une infinité) de boules rouges et vertes. À l'instant 0, une urne contient une boule de chaque couleur et on effectue une succession de tirages définis par la règle suivante : on tire une boule de l'urne "au hasard" et on la remet dans l'urne en ajoutant une boule du même couleur. Soit S_n le nombre de boules rouges au temps n, et $X_n := S_n/(n+2)$ la proportion de boules rouges au temps n.

1. Montrer que pour toute fonction f mesurable bornée, on a la relation :
$$\mathbb{E}[f(S_{n+1})|S_n] = f(S_n+1)\frac{S_n}{n+2} + f(S_n)\frac{n+2-S_n}{n+2}$$
2. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer $\mathbb{E}[X_n]$.
3. On fixe $k \geq 1$ et on pose $Z_n^{(k)} = \frac{S_n(S_n+1)\dots(S_n+k-1)}{(n+2)\dots(n+k+1)}$. Montrer que la suite $(Z_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer $\mathbb{E}[Z_n^{(k)}]$.

Exercice 6 : *Un critère de finitude pour les temps d'arrêt*
Soit T un temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{\geq 0}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ un entier tels que pour tout $n \geq 0$, on a $\mathbb{P}(T \leq n+N|\mathcal{F}_n) > \varepsilon,\ p.s.$. Montrer que T est fini presque sûrement et que $\mathbb{E}[T] < +\infty$.

Exercice 7 : *Une réciproque au théorème d'arrêt*
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite adaptée de variables aléatoires intégrables. Montrer que, si l'on a $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$ pour tout temps d'arrêt borné τ, alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

Exercice 8 : *Autre version du théorème d'arrêt*
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale définie sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ et T un temps d'arrêt vérifiant $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$, $\mathbb{E}(|X_T|) < +\infty$ et $\mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_{T>n}) \to 0$ lorsque n tend vers l'infini.

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|X_T|\mathbb{1}_{T>n}) = 0$.
2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|X_{T\wedge n} - X_T|) = 0$.
3. En déduire que $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.

Exercice 9 : *Ruine du joueur et identité de Wald*
Soient a et b des entiers strictement positifs et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mu := p\delta_1 + q\delta_{-1} + r\delta_0$ où $0 \leq p, q, r < 1$ et $p+q+r = 1$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ la filtration naturelle associée. On pose $S_0 := 0$ et $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ pour $n \geq 1$.

1. Soit $T = \inf\{n \geq 0,\ S_n \notin]-a, b[\}$. Montrer que T est un temps d'arrêt fini presque sûrement.
2. Soit ϕ la transformée de Laplace de μ i.e. $\phi(\lambda) = pe^{\lambda} + qe^{-\lambda} + r$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq 1$, on pose $Y_n := e^{\lambda S_n}/\phi(\lambda)^n$. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une martingale
3. Soit λ tel que tel que $\phi(\lambda) \geq 1$. Montrer que $\mathbb{E}(e^{\lambda S_T}\phi(\lambda)^{-T}) = 1$.
4. On suppose désormais que $p = q = 1/2$. Calculer $\mathbb{E}(S_T)$, $\mathbb{P}(S_T = -a)$, $\mathbb{P}(S_T = b)$.
5. Pour $\alpha > 1$, calculer $\mathbb{E}[\alpha^{-T}\mathbb{1}_{S_T=-a}]$ et $\mathbb{E}[\alpha^{-T}\mathbb{1}_{S_T=b}]$. En déduire $\mathbb{E}(T|S_T)$ et $\mathbb{E}[T]$.