Feuille d'exercices # 11

Exercice 1 *Une chaîne à trois états*
On considère une chaîne de Markov d'espace d'états $E := \{1, 2, 3\}$ et de matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Quels sont les états récurrents ? Transients ? Les lois stationnaires ?
2. Pour $x \in E$, on note T_x le temps d'atteinte de x. Calculer $\mathbb{E}_x[T_x]$.
3. Calculer la période de chaque état. Pour tout couple $(x, y) \in E^2$, calculer la limite de $Q^n(x, y)$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 2 *Chaîne de naissance et de mort, le retour*
On définit une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ en posant $X_0 := a$, et pour $n \geq 0$,

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1} = k + 1 | X_n = k) = p_k, \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = k - 1 | X_n = k) = q_k, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_k + q_k = 1, \\ p_k > 0, q_k > 0, \end{cases} \quad \text{pour} \quad k \geq 1,$$

et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = 1$.

1. Déterminer les mesures réversibles pour la chaîne X_n.
2. À quelle condition existe-t-il une mesure de probabilité réversible ?

Exercice 3 *Explosion en vol*
Soit (X_n) une chaîne de Markov d'espace d'états $E = \mathbb{N}$, et dont la matrice de transition est donnée par $Q(n, n + 1) = \theta_n$ et $Q(n, 0) = 1 - \theta_n$, où $0 < \theta_n < 1$ pour $n \geq 0$.

1. Étudier la nature de l'état 0, puis des autres états.
2. Existe-t-il une mesure réversible, invariante ?

Exercice 4 *Entomologie*
Une puce saute chaque seconde au hasard d'un sommet d'un triangle à un autre, indépendamment et uniformément. Une tique, quant à elle, choisit deux fois plus souvent de sauter dans le sens direct que dans le sens indirect. Quelles sont les mesures réversibles (resp. invariantes) des deux dynamiques ? Dans les deux cas, calculer la probabilité que l'animal se retrouve à son sommet de départ au bout de n sauts.

Exercice 5 *Réversibilité modulo n*
On fixe $n \geq 2$ et on considère la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dont la matrice de transition est donnée par $Q(i, i+1) = p$, $Q(i, i-1) = 1-p$ où $0 < p < 1$. Montrer que la chaîne est réversible si et seulement si $p = 1/2$.

Exercice 6 *Exemple de classification*
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de matrice de transition Q sur un espace d'état E au plus dénombrable. Soit $E_T \subset E$ l'ensemble des états transitoires que l'on suppose fini et non vide.

1. Montrer que $\forall x \in E, \forall y \in E_T$, $Q_n(x,y)$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. En déduire que si E est fini, la chaîne a au moins un état récurrent.
2. On suppose maintenant que $E = \{1, 2, \ldots, 6\}$ et que la matrice Q est de la forme suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} * & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & * & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & * \end{pmatrix}.$$

   Déterminer

   i) les états transitoires et récurrents de la chaîne ;

   ii) les probabilités d'absorption dans les sous-ensembles clos irréductibles.

   iii) Montrer que la chaîne admet une infinité de probabilités stationnaires.

Exercice 7 *Urne d'Ehrenfest, le retour*
Soient d balles ($d > 1$), numérotées de 1 à d et réparties dans 2 urnes A et B. On tire au hasard un nombre i uniformément entre 1 et d, et la balle numéro i est changée d'urne. Soit X_n le nombre de balles dans l'urne A après n tirages successifs.

1. Si X_0 est distribuée suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(d, 1/2)$, déterminer la loi de X_1. Que peut-on en déduire ?
2. La loi binomiale est-elle une mesure réversible ? Interpréter physiquement.
3. On rappelle que si π est une mesure de probabilité invariante pour la chaîne, alors le temps moyen de retour $\mathbb{E}_i[T_i]$ vérifie $\mathbb{E}_i[T_i] = 1/\pi_i$. Expliciter les temps de retour à l'état où l'urne A est vide, et au régime où les particules sont également réparties dans les deux urnes.
4. Quels sont les ordres de grandeur de ces temps lorsque d est de l'ordre du nombre d'Avogadro.