Feuille d'exercices # 10

Exercice 1 *La ruine du joueur (par les chaînes de Markov)*
Un joueur dispose d'un capital de i euro. À chaque temps n, il mise 1 euro sur le résultat d'un lancer de pièce (modélisé par une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$) ; il arrête de jouer lorsqu'il est ruiné. On note X_n le capital du joueur après le temps n. On cherche la probabilité que le joueur soit ruiné en un temps fini i.e. $h_i := \mathbb{P}_i(\exists n, X_n = 0)$.

1. Montrer que X_n est une chaîne de Markov, préciser sa matrice de transition.
2. Indiquer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et conclure.

Exercice 2 *Chaîne de naissance et de mort*
Afin de modéliser l'évolution d'une population, on définit une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ en posant $X_0 := a$, et pour $n \geq 0$,

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1} = k+1 | X_n = k) = p_k, \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = k-1 | X_n = k) = q_k, \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = k) = r_k, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_k + q_k + r_k = 1, \\ p_k > 0, q_k > 0, \end{cases} \quad \text{pour } \; k \geq 1,$$

et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = 1$. La quantité X_n représente la taille de la population au temps n. On cherche à exprimer la probabilité d'extinction d'une population qui comporte initialement i individus i.e. $h_i := \mathbb{P}_i(\exists n, X_n = 0)$. Pour tout $k \geq 1$, on pose

$$\gamma_k := \frac{q_k q_{k-1} \cdots q_1}{p_k p_{k-1} \cdots p_1}.$$

1. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
2. Suivant que $\sum_{k\geq 1} \gamma_k$ est finie ou non, exprimer h_i.

Exercice 3 *Un jeu pour augmenter rapidement son capital ?*
Un joueur dispose d'un capital initial de 2 euros et souhaite l'augmenter rapidement à au moins 10 euros. Il joue au jeu suivant : à chaque temps n, il mise une certaine somme de son capital, et selon le résultat du lancer d'une pièce équilibrée, il double ou perd sa mise.
Il adopte alors la stratégie suivante : tant que son capital est inférieur ou égal à 5 euros, il mise la totalité de son capital ; en revanche si son capital est supérieur strictement à 5 euros, il mise la quantité minimale qui lui permet d'atteindre un capital au moins égal à 10 euros.

1. Déterminer la probabilité que le joueur atteigne son but.
2. Combien de tours en moyenne va-t-il jouer ? (le jeu se termine soit quand le joueur atteint son but, soit lorsqu'il est ruiné)

Exercice 4 *Étude d'une chaîne sur* $\mathbb{N}$

On considère une chaine de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états $\mathbb{N}$ telle que

$$Q(0,1)=1, \quad Q(i,i+1)+Q(i,i-1)=1, \quad Q(i,i+1)=\left(\frac{i+1}{i}\right)^2 Q(i,i-1), \quad i\geq 1.$$

On suppose que $X_0=0$. Quelle est la probabilité que $X_n\geq 1$ pour tout $n\geq 1$?

Exercice 5 *Exemple de classification*

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de matrice de transition Q sur un espace d'état E au plus dénombrable. Soit $E_T\subset E$ l'ensemble des états transitoires que l'on suppose fini et non vide.

1. Montrer que $\forall x\in E, \forall y\in E_T$, $Q_n(x,y)$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. En déduire que si E est fini, la chaîne a au moins un état récurrent.
2. On suppose maintenant que $E=\{1,2,\dots,6\}$ et que la matrice Q est de la forme suivante :

$$Q=\begin{pmatrix} * & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & * & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & * \end{pmatrix}.$$

   Déterminer

   i) les états transitoires et récurrents de la chaîne ;

   ii) les probabilités d'absorption dans les sous-ensembles clos irréductibles.

   iii) Montrer que la chaîne admet une infinité de probabilités stationnaires.

   iv) Que vaut la fréquence limite de passage dans l'état 1.

Exercice 6 *Une chaîne à trois états*

On considère une chaîne de Markov d'espace d'états $E:=\{1,2,3\}$ et de matrice de transition

$$Q:=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Quels sont les états récurrents ? Transients ? Les lois stationnaires ?
2. Pour $x\in E$, on note T_x le temps d'atteinte de x. Calculer $\mathbb{E}_x[T_x]$.
3. Calculer la période de chaque état. Pour tout couple $(x,y)\in E^2$, calculer la limite de $Q^n(x,y)$ lorsque $n\to\infty$.