Université de Rennes 1 — Master 1 Mathématique
Martingales et chaînes de Markov — année 2012-2013

Feuille d'exercices # 1

Exercice 1 : *Mesurabilité*
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que Y est $\sigma(X)-$mesurable si et seulement si il existe une fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$. Indication : on pourra commencer en supposant Y étagée.

Exercice 2 : *Singletons, tribu et conditionnement*
On considère l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. Soient X la variable aléatoire définie par $X(\omega) = \cos(\pi\omega)$ et $\mathcal{G}$ l'ensemble formé des éléments $A \subseteq]0,1[$, tels que A ou A^c est dénombrable.

1. Vérifier que $\mathcal{G}$ est une tribu. Quel est le lien entre $\mathcal{G}$ est les singletons de $]0,1[$?
2. Montrer que $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = 0$ presque sûrement.

Exercice 3 : *Variables positives et conditionnement*
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ et X une variable aléatoire réelle positive. Montrer que l'ensemble $\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) > 0\}$ est le plus petit ensemble $\mathcal{G}-$mesurable (aux négligeables près) qui contient $\{X > 0\}$.

Exercice 4 : *Inégalité de Cauchy–Schwarz conditionnelle*
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ et X, Y deux variables aléatoires réelles telles que $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ et $\mathbb{E}(Y^2) < +\infty$. En considérant le fait que $\mathbb{E}[(X+\theta Y)^2|\mathcal{G}] \geq 0\, p.s.$ pour tout $\theta \in \mathbb{Q}$, établir l'inégalité $\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}]^2 \leq \mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}]\mathbb{E}[Y^2|\mathcal{G}]$ *p.s.*

Exercice 5 :*Conditionnement par une variable discrète*
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Si Y est une variable aléatoire intégrable, montrer que l'on a

$$\mathbb{E}[Y|X] = \sum_{i\geq 1} \frac{\mathbb{E}[Y \mathbb{1}_{X=x_i}]}{\mathbb{P}(X = x_i)} \mathbb{1}_{X=x_i}$$

Exercice 6 : *Caractérisation de l'indépendance*
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si pour toute application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne bornée on a :

$$\mathbb{E}(g(Y)|X) = \mathbb{E}(g(Y)) \ \ \mathbb{P} - p.s.$$

Application : soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité $p(x, y) = e^{-y}\mathbb{1}_{0<x<y}$ .Calculer la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$. En déduire que X et $X - Y$ sont indépendantes.

Exercice 7 : *Problème de minimisation*
Proposer (au moins) deux méthodes pour résoudre le problème suivant : trouver deux réels a et b qui minimisent l'intégrale

$$\int_0^1 (e^x - ax - b)^2 dx.$$

Exercice 8 : *Variance et covariance conditionnelles*
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ et X, Y deux variables aléatoires réelles telles que $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ et $\mathbb{E}(Y^2) < +\infty$. On définit

$$\operatorname{cov}^{\mathcal{G}}(X,Y) := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) \times (Y - \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}])|\mathcal{G}\right], \quad \operatorname{var}^{\mathcal{G}}(X) := \operatorname{cov}^{\mathcal{G}}(X,X)$$

Montrer que $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}], \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]) + \mathbb{E}[\operatorname{cov}^{\mathcal{G}}(X,Y)]$.

Exercice 9 : *Somme de variables exponentielles et conditionnement*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On note $T := X_1 + \ldots + X_n$. Calculer $\mathbb{E}(h(X_1)|T)$ pour toute fonction h borélienne positive. Que remarque-t-on lorsque $n = 2$?

Exercice 10 : *Exemples de conditionnements discrets*

1. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois binomiales de paramètres respectifs (n_1, p) et (n_2, p). Déterminer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2 = n$. Déterminer $\mathbb{E}(X_1|X_1 + X_2)$.
2. Soient $X_1, \ldots, X_p$ sont des variables aléaoires de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Déterminer la loi de $(X_1, \ldots, X_p)$ sachant $X_1 + X_2 + \ldots + X_p = n$

Exercice 11 : *Variables géométriques et conditionnement*
On considère une variable aléatoire géométrique X telle que $\mathbb{P}(X = i) = 2/3^i$ pour $i \geq 1$. Soit Y une variable aléatoire telle que, sachant $X = i$, la loi de Y est la loi uniforme sur $\{i, i+1\}$.

1. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{E}[Y|X = i]$. En déduire $\mathbb{E}[Y|X]$, puis $\mathbb{E}[Y]$.
2. Calculer la loi jointe du couple (X, Y) et en déduire la loi de Y.
3. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{E}[X|Y = j]$ et en déduire $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 12 : *Exemple de conditionnement continu*
Soit (X, Y) un vecteur aléatoire admettant la densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$: $f(x,y) = 6xy(2 - x - y)\mathbb{1}_{0<x<1, 0<y<1}$. Calculer $\mathbb{E}(X|Y = y)$ pour $0 < y < 1$.

Exercice 13 : *Conditionnement par le maximum*
Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ un $n-$échantillon de variables aléatoires réelles intégrables de densité commune $f(x)$ et $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ sa version réordonnée i.e. $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ presque sûrement. Déterminer la loi conditionnelle de $X_{(1)}$ sachant $X_{(n)} = x_n$ et $\mathbb{E}[X_{(1)}|X_{(n)}]$. Particulariser au cas où les variables X_i sont uniformes sur $[0, 1]$.

Exercice 14 : *Exemples de conditionnements gaussiens*
On considère un vecteur gaussien $[X, Y]'$ de moyenne $m = [1, -1]'$ et de matrice de covariance :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire la densité du vecteur $[X, Y]'$. Quelle est la loi de X ? de Y ? de $X + Y$?
2. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X|Y]$. Quelle est sa loi ?
3. Si (U, V) est un vecteur gaussien centré réduit, que vaut $\mathbb{E}[U|U + V]$? Retrouver le résultat géométriquement.