Feuille d'exercices # 0

Exercice 1 : *Variables aléatoires réelles et moments*

1. Montrer qu'une variable aléatoire réelle positive dont l'espérance est nulle est nulle presque sûrement.
2. Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que $\{x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X = x) > 0\}$ est un ensemble au plus dénombrable.
3. Soit $m \geq 1$ un entier. Donner un exemple d'une variable aléatoire réelle qui admet un moment d'ordre m mais pas de moment d'ordre $m+1$.

Exercice 2 : *Gaussienne et changements de variables*

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire sur $\mathbb{R}^2$ dont la loi admet la densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Déterminer les lois de X, Y, $X + Y$, $X^2 + Y^2$.

Exercice 3 : *Indépendance*

1. Déterminer à quelle condition une variable aléatoire réelle est indépendante d'elle-même.
2. Montrer que si la somme de deux variables aléatoires discrètes indépendantes a la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$, alors l'une des deux variables aléatoires est constante.
3. Soient $N_1, \ldots, N_r$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \ldots ; \lambda_r$. Déterminer la loi de $N_1 + \ldots + N_r$.

Exercice 4 : *Convergence de variables aléatoires*

1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Soient $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'évènements sur cet espace et $p \geq 1$ un réel. Déterminer pour chacune des convergences suivantes à quelle condition sur la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ elle a lieu.
   (a) La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
   (b) La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{L}^p$ vers 0.
   (c) La suite $((\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $\sum_{n\geq 1} X_n$ converge presque sûrement. Montrer que pour tout réel $c > 0$, on a $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > c) < +\infty$.
3. Construire une suite de variables aléatoires intégrables $(X_n)_{n\geq 1}$ et une variable aléatoire intégrable X telles qu'on ait $X_n \xrightarrow{loi} X$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n] \neq \mathbb{E}[X]$.
4. Montrer que si une suite de variables aléatoires converge en loi et si chaque terme de la suite a une loi exponentielle, alors la loi limite est exponentielle ou la masse de Dirac en 0.

Exercice 5 : *Loi des grands nombres et théoreme limite central*

1. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes toutes de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Que peut-dire de la suite

$$\frac{f(U_1) + \ldots + f(U_n)}{n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$?

2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$. Plus généralement, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée, montrer que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right) \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-t^2/2} dt.$$

3. Un écrivain qui commet en moyenne une faute d'orthographe toutes les 10 pages vient d'écrire un roman de 400 pages. Quelle est la probabilité qu'il ait commis plus de 50 fautes ?
4. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. définies sur le même espace probabilisé et telle que la suite des somme partielles renormalisées $S_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers une variable $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que X_1 est de carré intégrable, avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$.