Éléments de correction de la feuille d'exercices # 8

Exercice 3 *Excursions d'une marche aléatoire simple*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1,+1\}$. On pose $S_0 := 0$ et pour $n \geq 1$: $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. On pose $T_0^0 := 0$ et par récurrence, on définit $T_0^{n+1} := \inf\{n > T_0^n,\, S_n = 0\}$ le temps $n+1-$ième temps de retour en zéro de la chaîne $(S_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que la loi de $\Delta_0^n := T_0^{n+1} - T_0^n$ ne dépend pas de n.
   Solution : Soit $k \geq 0$, alors pour $n \geq 0$, en appliquant la propriété de Markov forte au temps T_0^n, il vient :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0(\Delta_0^n = k) &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{T_0^{n+1}-T_0^n=k}] \\ &= \mathbb{E}_0[\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{T_0^{n+1}-T_0^n=k}|\mathcal{F}_{T_0^n}]] \\ &= \mathbb{E}_0[\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{T_0^1-T_0^0=k}]] \\ &= \mathbb{P}_0(T_0^1 - T_0^0 = k) = \mathbb{P}_0(T_0^1 = k).\end{aligned}$$

2. Montrer que les excursions $(S_{T_0^k}, \ldots, S_{T_0^{k+1}})_{k\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes et identiquement distribuées.
   Solution : Soient $e_1, \ldots, e_{n+1}$ des trajectoires de longueur finie, joignant 0 à 0,et évitant 0 en dehors de leur extrémités. D'après la propriété de Markov appliquée au temps T_0^1, on a
$$\mathbb{P}_0((S_{T_0^0}, \ldots, S_{T_0^1}) = e_1, (S_{T_0^1}, \ldots, S_{T_0^2}) = e_2, \ldots, (S_{T_0^n}, \ldots, S_{T_0^{n+1}}) = e_{n+1})$$
$$= \mathbb{P}_0((S_{T_0^0}, \ldots, S_{T_0^1}) = e_1) \times \mathbb{P}_0((S_{T_0^0}, \ldots, S_{T_0^1}) = e_2, \ldots, (S_{T_0^{n-1}}, \ldots, S_{T_0^n}) = e_{n+1})$$
   En itérant l'argument, il vient
$$\mathbb{P}_0((S_{T_0^0}, \ldots, S_{T_0^1}) = e_1, (S_{T_0^1}, \ldots, S_{T_0^2}) = e_2, \ldots, (S_{T_0^n}, \ldots, S_{T_0^{n+1}}) = e_{n+1})$$
$$= \mathbb{P}_0((S_{T_0^0}, \ldots, S_{T_0^1}) = e_1) \times \mathbb{P}_0((S_{T_0^0}, \ldots, S_{T_0^1}) = e_2) \times \ldots \times \mathbb{P}((S_{T_0^0}, \ldots, S_{T_0^1}) = e_{n+1}),$$
   d'où le résultat.

Exercice 4 *Problème de Dirichlet et propriété de Markov*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace dénombrable E, de matrice de transition Q et issue de x sous $\mathbb{P}_x$. Soient F un sous-ensemble non vide de E et h une fonction positive bornée $h : F \to \mathbb{R}$. On pose $T_F := \inf\{n \geq 0,\, X \in F\}$ le temps d'atteinte de F par la chaîne.

1. Lorsque $(X_n)_{n\geq 0}$ est la marche aléatoire simple sur $E = \mathbb{Z}^2$, identifier l'opérateur $\mathrm{Id} - Q$.
   Solution : On reconnaît le laplacien discret sur le réseau.
2. Montrer que la fonction $g : E \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) := \mathbb{E}_x[h(X_{T_F})\mathbb{1}_{T_F<+\infty}]$ est solution du problème de Dirichlet discret :
$$\begin{cases} g(x) = Qg(x), & \forall x \in E\backslash F, \\ g(x) = h(x), & \forall x \in F. \end{cases}$$

Solution : tout d'abord, dans le cas où $x \in F$, on a $h(X_{T_F})\mathbb{1}_{T_F<+\infty} = h(x)$ $\mathbb{P}_x - p.s.$ donc $g(x) = \mathbb{E}_x[h(X_{T_F})\mathbb{1}_{T_F<+\infty}] = h(x)$. Ensuite si $x \notin F$, on a $T_F(X_0,\ldots) = 1 + T_F(X_1,\ldots)$ et d'après la propriété de Markov au temps 1, il vient :

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathbb{E}_x[h(X_{T_F(X_0,\ldots)})\mathbb{1}_{T_F(X_0,\ldots)<+\infty}] \\ &= \mathbb{E}_x[h(X_{1+T_F(X_1,\ldots)})\mathbb{1}_{T_F(X_1,\ldots)<+\infty}] \\ &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[h(X_{1+T_F(X_1,\ldots)})\mathbb{1}_{T_F(X_1,\ldots)<+\infty}|\mathcal{F}_1]] \\ &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X_1}[h(X_{T_F(X_0,\ldots)})\mathbb{1}_{T_F(X_0,\ldots)<+\infty}]] \\ &= \mathbb{E}_x[g(X_1)] = \textstyle\sum_y Q(x,y)g(y) = Qg(x). \end{aligned}$$

3. Soit f une autre solution positive du problème ci-dessus. Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a l'identité $f(x) = \mathbb{E}_x\left[f(X_{n\wedge T_F})\right]$. En déduire que $f \geq g$.
   Solution : On montre facilement la formule $f(x) = \mathbb{E}_x\left[f(X_{n\wedge T_F})\right]$ par récurrence sur n : c'est évident au rang 0. Si on suppose le résultat vrai au rang n, on écrit alors

   $$\mathbb{E}_x\left[f(X_{(n+1)\wedge T_F})\right] = \mathbb{E}_x\left[f(X_{n+1})\mathbb{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right] + \mathbb{E}_x\left[f(X_{T_F})\mathbb{1}_{\{T_F\leq n\}}\right].$$

   Comme $\{T_F \geq n+1\} = \{T_F < n\}^c \in \mathcal{F}_n$, d'après la propriété de Markov faible appliquée au temps n :

   $$\begin{aligned} \mathbb{E}_x\left[f(X_{n+1})\mathbb{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right] &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n\right]\mathbb{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[Qf(X_n)\mathbb{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right]. \end{aligned}$$

   Sur l'ensemble $T_F \geq n+1$, on a $X_n \notin F$, et comme f est solution du problème de Dirichlet, on a $Qf(X_n) = f(X_n)$. Autrement dit, on a

   $$\mathbb{E}_x\left[f(X_{n+1})\mathbb{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right] = \mathbb{E}_x\left[f(X_n)\mathbb{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right].$$

   D'après l'hypothèse de récurrence, on conclut alors que

   $$\mathbb{E}_x\left[f(X_{(n+1)\wedge T_F})\right] = \mathbb{E}_x\left[f(X_{n\wedge T_F})\right] = f(x).$$

   Montrons à présent que $f \geq g$. Pour cela, on écrit :

   $$f(x) = \mathbb{E}_x\left[f(X_{n\wedge T_F})\right] \geq \mathbb{E}_x\left[f(X_{T_F})\mathbb{1}_{\{T_F\leq n\}}\right] = \mathbb{E}_x\left[h(X_{T_F})\mathbb{1}_{\{T_F\leq n\}}\right].$$

   Or la suite $(h(X_{T_F})\mathbb{1}_{\{T_F\leq n\}})_{n\geq 0}$ est croissante et positive et

   $$\lim_{n\to+\infty} h(X_{T_F})\mathbb{1}_{\{T_F\leq n\}} = h(X_{T_F})\mathbb{1}_{\{T_F<+\infty\}}.$$

   D'après le théorème de convergence monotone, on a alors

   $$f(x) \geq \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_x[h(X_{T_F})\mathbb{1}_{\{T_F\leq n\}}] = \mathbb{E}_x[h(X_{T_F})\mathbb{1}_{\{T_F<+\infty\}}] = g(x).$$