

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE LA FEUILLE # 3

Exercice 8 : Fonctions intégrables et fonctions étagées

Soit f une fonction mesurable et intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $[0, 1]$. On souhaite retrouver le résultat suivant : il existe une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions étagées qui converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1([0, 1], d\lambda)$ vers f . Soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et pour tout entier naturel n : $X_n := 2^{-n} \lfloor 2^n X \rfloor$. On pose $Y := f(X)$ et $Y_n := \mathbb{E}[Y | \mathcal{F}_n]$ où $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$.

1. Montrer que X_n converge vers X . Quelle signification donner à $2^n(X_n - X_{n-1})$?

Par définition, on a $|X_n - X| \leq 2^{-n}$, donc $X_n \rightarrow X$ presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$. Le nombre $2^n(X_n - X_{n-1})$ n'est autre que le n -ième terme dans la décomposition binaire de X .

2. Montrer que Y_n converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$. Identifier sa limite.

On vérifie facilement que Y_n est une martingale uniformément intégrable de sorte qu'elle converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers la limite $Y_\infty = \mathbb{E}[Y | \mathcal{F}_\infty]$ où

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma(X_0, X_1, X_2, \dots) = \sigma(X).$$

En effet, la variable X est entièrement caractérisée par sa décomposition dyadique, c'est-à-dire par $X_0, X_1, X_2, \dots$. Ainsi, on a $Y_\infty = \mathbb{E}[f(X) | X] = f(X)$.

3. Expliciter Y_n et conclure.

Conditionnellement à la tribu $\mathcal{F}_n$, la loi de X n'est autre que la loi uniforme sur l'intervalle $[X_n, X_n + 2^{-n}]$. On a donc

$$Y_n = \mathbb{E}[f(X) | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[f(X) | X_0, X_1, \dots, X_n] = \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} f(u) 2^n du = f_n(X)$$

où la fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction étagée :

$$f_n(x) = 2^n \int_{x_n}^{x_n + 2^{-n}} f(u) du, \quad \begin{array}{l} x_n \text{ étant le nombre de la forme } k2^{-n} \\ \text{tel que } x_n \leq x < x_n + 2^{-n}. \end{array}$$

D'après la question précédente, $f_n(X)$ converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers $f(X)$, autrement dit pour presque tout $x \in [0, 1]$, on a $f_n(x) \rightarrow f(x)$ et

$$\int_0^1 |f_n(y) - f(y)| dy \rightarrow 0.$$

Exercice 9 : Théorème de Rademacher sur les fonctions lipschitziennes

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $X_n := 2^{-n} \lfloor 2^n X \rfloor$ et $Z_n := 2^n (f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n))$.

1. Pour $n \geq 1$, montrer les égalités de tribus suivantes :

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sigma(X_n), \quad \bigcap_{n \geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) = \sigma(X).$$

Vu en cours, faire un dessin.

2. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable continue. En déduire que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une martingale bornée relativement à $(\mathcal{F}_n)$.

Conditionnellement à la tribu $\mathcal{F}_n$, la loi de X_{n+1} n'est autre que la loi uniforme sur l'ensemble $\{X_n, X_n + 2^{-(n+1)}\}$. Ainsi, pour toute $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable continue, on a

$$\mathbb{E}[h(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n] = \frac{h(X_n)}{2} + \frac{h(X_n + 2^{-(n+1)})}{2} \quad (1)$$

Les variables Z_n sont clairement adaptées. Par ailleurs, la condition de Lipschitz implique que la suite $(Z_n)_{n \geq 0}$ est bornée presque sûrement par la constante $C : |Z_n| \leq C$ p.s. pour tout $n \geq 0$. En choisissant $h(x) = 2^{n+1} (f(x + 2^{-n-1}) - f(x))$ dans (1), il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \frac{1}{2} \times 2^{n+1} (f(X_n + 2^{-n-1}) - f(X_n)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \times 2^{n+1} (f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n + 2^{-n-1})) \\ &= 2^n (f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)) = Z_n. \end{aligned}$$

La suite $(Z_n)_{n \geq 0}$ est donc bien une martingale bornée.

3. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z , limite p.s. et dans $\mathbb{L}^1$ de $(Z_n)_{n \geq 0}$, puis qu'il existe une fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée telle que $Z = g(X)$.

La martingale $(Z_n)_{n \geq 0}$ étant bornée, elle est uniformément intégrable et converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers une variable Z telle que $Z_n = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n]$. D'après le cours, Z est $\mathcal{F}_\infty$ -mesurable. Or d'après la première question, on a $\mathcal{F}_\infty = \sigma(X)$ ici. Autrement dit, il existe une fonction mesurable g (de fait bornée) telle que $Z = g(X)$.

4. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que presque sûrement :

$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u) du.$$

Comme dans l'exercice précédent, conditionnellement à la tribu $\mathcal{F}_n$, la loi de X n'est autre que la loi uniforme sur l'intervalle $[X_n, X_n + 2^{-n}]$, on a donc pour toute fonction $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée :

$$\mathbb{E}[h(X)|\mathcal{F}_n] = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} h(u) du,$$

en particulier,

$$Z_n = \mathbb{E}[g(X)|\mathcal{F}_n] = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u) du.$$

5. Conclure que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)du$.

La dernière égalité nous dit que, presque sûrement :

$$f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n) = \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u)du.$$

Ainsi, pour tout point de la forme $k2^{-n}$, on a

$$f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n}) = \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} g(u)du,$$

d'où en sommant, pour tout réel dyadique x de l'intervalle $[0, 1]$:

$$f(x) - f(0) = \int_0^x g(z)dz.$$

Le cas d'un point x générique s'obtient par approximation par les dyadiques grâce à la continuité de f et de l'intégrale.