Élément de correction de la feuille d'exercices # 2

Exercice 9 : *Ruine du joueur et identité de Wald*
Soient a et b des entiers strictement positifs et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mu := p\delta_1 + q\delta_{-1} + r\delta_0$ où $0 \leq p, q, r < 1$ et $p+q+r = 1$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ la filtration naturelle associée. On pose $S_0 := 0$ et $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ pour $n \geq 1$.

1. Soit $T = \inf\{n \geq 0,\ S_n \notin]-a, b[\}$. Montrer que T est un temps d'arrêt fini presque sûrement.

   Le temps T est bien un temps d'arrêt puisque, pour $n \geq 0$, on a
   $$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(S_0 \in]-a,b[, \ldots, S_{n-1} \in]-a,b[, S_n \notin]-a,b[) \in \mathcal{F}_n.$$
   On vérifie aisément que, si $m := \mathbb{E}[X_1]$, alors la suite $M_n := S_n - nm$ est une martingale. D'après le théorème d'arrêt, on a alors pour tout n :
   $$\mathbb{E}[M_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[M_0], \quad i.e.\ \ m\mathbb{E}[T\wedge n] = \mathbb{E}[S_{T\wedge n}] \leq a+b+1.$$
   Lorsque n tend vers l'infini, il vient alors par monotonie $m\mathbb{E}[T] \leq a+b+1 < +\infty$. En particulier, T est fini presque sûrement.

2. Soit ϕ la transformée de Laplace de μ i.e. $\phi(\lambda) = pe^{\lambda} + qe^{-\lambda} + r$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq 1$, on pose $Y_n := e^{\lambda S_n}/\phi(\lambda)^n$. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une martingale.

   Déjà vu en cours / TD.

3. Soit λ tel que tel que $\phi(\lambda) \geq 1$. Montrer que $\mathbb{E}(e^{\lambda S_T}\phi(\lambda)^{-T}) = 1$.

   C'est le théorème d'arrêt (vérifier le bon jeu d'hypothèses)

4. On suppose désormais que $p = q = 1/2$. Calculer $\mathbb{E}(S_T)$, $\mathbb{P}(S_T = -a)$, $\mathbb{P}(S_T = b)$.

   On a ici $\phi(\lambda) = \cosh(\lambda)$. En dérivant l'égalité de la question précédente en en faisant $\lambda = 0$, on trouve $\mathbb{E}[S_T] = 0$, dont on déduit facilement :
   $$\mathbb{P}(S_T = -a) = \frac{b}{a+b}, \quad \mathbb{P}(S_T = b) = \frac{a}{a+b}$$

5. Pour $\alpha > 1$, calculer $\mathbb{E}[\alpha^{-T}\mathbb{1}_{S_T=-a}]$ et $\mathbb{E}[\alpha^{-T}\mathbb{1}_{S_T=b}]$. En déduire $\mathbb{E}(T|S_T)$ et $\mathbb{E}[T]$.

   Il existe $\lambda > 0$ tel que $\alpha = \phi(\lambda)$. L'égalité de la question 3 donne alors deux équations (une pour λ, l'autre pour $-\lambda$:
   $$e^{\lambda a}\mathbb{E}[\alpha^{-T}\mathbb{1}_{S_T=-a}] + e^{\lambda b}\mathbb{E}[\alpha^{-T}\mathbb{1}_{S_T=b}] = 1,$$
   $$e^{-\lambda a}\mathbb{E}[\alpha^{-T}\mathbb{1}_{S_T=-a}] + e^{-\lambda b}\mathbb{E}[\alpha^{-T}\mathbb{1}_{S_T=b}] = 1,$$
   dont on déduit
   $$\mathbb{E}[\alpha^{-T}\mathbb{1}_{S_T=-a}] = \frac{\sinh(\lambda b)}{\sinh(\lambda(a+b))}, \quad \mathbb{E}[\alpha^{-T}\mathbb{1}_{S_T=b}] = \frac{\sinh(\lambda a)}{\sinh(\lambda(a+b))}.$$
   Les deux dernières espérances peuvent alors être calculées en dérivant par rapport à α puis en faisant $\alpha = 1$.