Éléments de correction de la feuille de révision (suite)

Exercice 6 *Suites extraites d'une martingale*
On considère $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q. Les suites ci-dessous sont-elles des chaînes de Markov ? Dans l'affirmative, préciser leur matrice de transition.

1. $(Y_n)_{n\geq 0} := (X_{n+k})_{n\geq 0}$, où $k \in \mathbb{N}$ est fixé.
   Solution : Oui, (Y_n) est bien une chaîne de Markov. En effet, comme (X_n) est une chaîne de Markov, on sait qu'il existe une fonction mesurable f et une suite i.i.d. ε_n telles que, pour tout $n \geq 0$:
   $$X_{n+1} = f(X_n, \varepsilon_{n+1}).$$
   En particulier, on a donc
   $$Y_{n+1} = X_{n+k+1} = f(X_{n+k}, \varepsilon_{n+k+1}) = f(Y_n, \widetilde{\varepsilon}_{n+1}),$$
   où la suite $(\widetilde{\varepsilon}_{n+1})$ est i.i.d. d'où le résultat. On vérifie aisément que la matrice de transition de Y_n n'est autre que la matrice Q.
2. $(Z_n)_{n\geq 0} := (X_{2n})_{n\geq 0}$.
   Solution : Oui, (Z_n) est également une chaîne de Markov. En effet, comme (X_n) est une chaîne de Markov, on sait qu'il existe une fonction mesurable f et une suite i.i.d. ε_n telles que, pour tout $n \geq 0$:
   $$X_{n+1} = f(X_n, \varepsilon_{n+1}).$$
   En particulier,
   $$\begin{aligned} Z_{n+1} &= X_{2n+2} = f(X_{2n+1}, \varepsilon_{2n+2}) \\ &= f(f(X_{2n}, \varepsilon_{2n+1}), \varepsilon_{2n+2}) \\ &= f(f(Z_n, \varepsilon_{2n+1}), \varepsilon_{2n+2}) \\ &:= g(Z_n, \widetilde{\varepsilon}_{n+1}), \end{aligned}$$
   où la suite $(\widetilde{\varepsilon}_n) = ((\varepsilon_{2n}, \varepsilon_{2n-1}))$ est une suite i.i.d., d'où le résultat. Cette fois, la matrice de transtion de Z_n est la matrice Q^2.

Exercice 7 *Chaîne pressée*
Soient E un ensemble au plus dénombrable, Q une matrice de transition sur E et $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov canonique associée. On suppose que pour tout $x \in E$, on a $Q(x,x) < 1$. On définit alors une suite de variables aléatoires à valeurs entières $\tau_0 := 0$, $\tau_1 := \inf\{n \geq 1, X_n \neq X_0\}$ et pour $n \geq 1$, $\tau_{n+1} := \tau_n + \tau_1 \circ \theta_{\tau_n}$.

1. Montrer que τ_1 est un temps d'arrêt et que pour tout $x \in E$, τ_1 est fini $\mathbb{P}_x-$presque sûrement. Calculer la loi de τ_1 ainsi que celle de X_{τ_1}.
   Solution : Soit $k \geq 1$ un entier, alors
   $$\{\tau_1 = k\} = \{X_0 = X_1 = \ldots = X_{k-1}, X_k \neq X_0\} \in \mathcal{F}_k,$$
   donc τ_1 est bien un temps d'arrêt. Sous la loi $\mathbb{P}_x$, on a
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(\tau_1 = k) &= \mathbb{P}_x(X_1 = x, X_2 = x, \ldots, X_{k-1} = x, X_k \neq x) \\ &= Q(x,x)^{k-1}(1 - Q(x,x)), \end{aligned}$$

autrement dit, τ_1 suit la loi géométrique de paramètre $p = 1 - Q(x,x)$. En particulier, $\mathbb{P}_x(\tau_1 < \infty) = 1$. Naturellement, on a $\mathbb{P}_x(X_{\tau_1} = x) = 0$. Par ailleurs, pour $y \neq x$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(X_{\tau_1} = y) &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_x(X_{\tau_1} = y \text{ et } \tau_1 = k) \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_x(X_k = y \text{ et } \tau_1 = k) \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_x(X_k = y \text{ et } X_1 = \ldots = X_{k-1} = x) \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_x(X_k = y \mid X_1 = \ldots = X_{k-1} = x)\mathbb{P}(X_1 = \ldots = X_{k-1} = x) \\
&\overset{1}{=} \sum_{k\geq 1} Q(x,y)\mathbb{P}(X_1 = \ldots = X_{k-1} = x) \\
&= \sum_{k\geq 1} Q(x,y)Q(x,x)^{k-1} \\
&= \frac{Q(x,y)}{1 - Q(x,x)},
\end{aligned}$$

où en 1, on a appliqué la propriété de Markov au temps $k-1$. On vérifie au passage que $\sum_{y\neq x} \mathbb{P}_x(X_{\tau_1} = y) = 1$, ce qui est heureux !

2. Donner une autre façon de définir la suite $(\tau_n)_{n\geq 0}$ et montrer que les τ_n sont des temps d'arrêt.

   Solution : la suite (τ_n) peut-être définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} \tau_0 = 0, \\ \\ \tau_{n+1} = \inf\{k > \tau_n, X_k \neq X_{\tau_n}\}, \quad \text{pour } n \geq 0. \end{cases}$$

   Pour voir que les τ_n sont des temps d'arrêt, on peut raisonner par récurrence. On sait déjà que τ_1 est un temps d'arrêt. Supposons qu'à n fixé, τ_n soit un temps d'arrêt, alors pour $k > \tau_n$:

$$\begin{aligned}
\{\tau_{n+1} = k\} &= \bigsqcup_{1<\ell<k} \left(\{\tau_{n+1} = k\} \cap \{\tau_n = \ell\}\right) \\
&= \bigsqcup_{1<\ell<k} \underbrace{\left(\underbrace{\{\tau_n = \ell\}}_{\in \mathcal{F}_\ell} \cap \underbrace{\{X_\ell = X_{\ell+1} = \ldots = X_{k-1}\} \cap \{X_k \neq X_{k-1}\}}_{\in \mathcal{F}_k}\right)}_{\in \mathcal{F}_k}
\end{aligned}$$

3. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 0} := (X_{\tau_n})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{\tau_n})$. Quelle est sa matrice de transition ?

   Solution : la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ est naturellement adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_{\tau_n})$. Par ailleurs, d'après la propriété de Markov forte appliquée au temps d'arrêt τ_n d'une part, et d'après la première question d'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(Y_{n+1} = x_{n+1} | Y_n = x_n, \ldots, Y_1 = x_1) &= \mathbb{P}_x(X_{\tau_{n+1}} = x_{n+1} | X_{\tau_n} = x_n, \ldots, X_{\tau_1} = x_1) \\
&= \mathbb{P}_{x_n}(X_{\tau_1} = x_{n+1}) \\
&= \widetilde{Q}(x_n, x_{n+1}) := \begin{cases} \dfrac{Q(x_n, x_{n+1})}{1 - Q(x_n, x_n)} & \text{si } x_{n+1} \neq x_n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

4. On suppose que (X_n) est irréductible récurrente de mesure invariante μ. Montrer que la chaîne (Y_n) est également irréductible récurrente et que $\pi(y) := (1 - Q(y,y))\mu(y)$ est une mesure invariante pour cette dernière.
   Solution : si μ est invariante pour Q, on a par définition :

$$\sum_{y \in E} \mu(y) Q(y,x) = \mu(x),$$

   de sorte que

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{y \in E} \pi(y) \widetilde{Q}(y,x) \quad &= \sum_{y \neq x} \left((1 - Q(y,y))\mu(y) \times \frac{Q(y,x)}{1 - Q(y,y)} \right) \\
&= \sum_{y \neq x} \mu(y) \times Q(y,x) \\
&= \sum_{y \in E} \mu(y) \times Q(y,x) - \mu(x) Q(x,x) \\
&= \mu(x) - \mu(x) Q(x,x) \\
&= \pi(x),
\end{aligned}$$

   et la mesure π est bien invariante pour la chaîne (Y_n).