ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE LA FEUILLE DE RÉVISION

Exercice 1 *Sur les espérances et les loi conditionnelles*

1. Soit (X, Y) un vecteur gaussien centré de covariance $\Gamma := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbb{E}(X|Y)$ et donner la loi conditionnelle $\mathcal{L}(X|Y = y)$.

Solution : D'après le cours, $\mathbb{E}(X|Y) = \alpha Y$ avec $\alpha = \mathbb{E}[XY]/\mathbb{E}[Y^2] = 1/2$. Toujours d'après le cours, le vecteur (X, Y) admet la densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Gamma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x, y)\Gamma^{-1}(x, y)^*\right).$$

La densité $f_{(X|Y=y)}$ de la loi conditionnelle $\mathcal{L}(X|Y = y)$ est alors obtenue par la formule usuelle :

$$f_{(X|Y=y)}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dx}$$

Remarque : de façon plus générale, si X est un vecteur gaussien de moyenne $m \in \mathbb{R}^d$ et de matrice de covariance $\Gamma \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, alors la densité f_X du vecteur X par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ est :

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(\Gamma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}((x - m)^*\Gamma^{-1}(x - m))\right),$$

où x est un vecteur colonne dans $\mathbb{R}^d$. La fonction caractéristique $\phi_X(u)$ est quant à elle donnée par :

$$\phi_X(u) := \mathbb{E}[e^{i\langle u, X \rangle}] = \exp\left(i\langle u, m \rangle - \frac{1}{2}u^*\Gamma u\right).$$

où u est également un vecteur colonne dans $\mathbb{R}^d$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires de carré intégrable telles que $\mathbb{E}(X|Y) = Y$ et $\mathbb{E}(Y|X) = X$ presque sûrement. Montrer que $X = Y$ presque sûrement.

Solution : À partir des égalités presque sûres $\mathbb{E}(X|Y) = Y$ et $\mathbb{E}(Y|X) = X$, on obtient facilement que $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(XY)$. Dès lors, on a

$$\mathbb{E}[(X - Y)^2] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] - 2\mathbb{E}(XY) = 0$$

d'où le résultat.

3. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de même densité f continue, d'espérance finie et soit $X_{(1)} < \dots < X_{(n)}$ leur statistique d'ordre. Déterminer la loi de X_1 sachant $X_{(n)}$ en fonction de la densité f et fonction de répartition $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$.

Solution : Deux cas peuvent se produire, soit $X_1 = X_{(n)}$ ce qui arrive avec proba $1/n$, soit $X_1 < X_{(n)}$ ce qui arrive avec proba $1 - 1/n$. Dans le second cas, la loi de X_1 est simplement la loi initiale conditionnée à être dans l'intervalle $] - \infty, X_{(n)}]$. Au final, la loi $\mathcal{L}(X_1|X_{(n)})$ s'écrit donc :

$$\mathcal{L}(X_1|X_{(n)})(u) = \frac{1}{n}\delta_{X_{(n)}}(u) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{f(u)\mathbb{1}_{]-\infty, X_{(n)]}}}{F(X_{(n)})}.$$

Exercice 2 *Identités de martingales de carré intégrable*

Soient $(X_n)_{n \geq 0}$ et $(Y_n)_{n \geq 0}$ deux $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ martingales de carré intégrable. Démontrer les assertions suivantes :

1. Pour $m \leq n$, $\mathbb{E}[X_n Y_m | \mathcal{F}_m] = X_m Y_m$ presque sûrement ;

Solution : $\mathbb{E}[X_n Y_m | \mathcal{F}_m] = Y_m \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_m] = Y_m X_m$ presque sûrement. En particulier, en prenant l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}[X_n Y_m] = \mathbb{E}[X_m Y_m].$$

2. $\mathbb{E}[X_n Y_n] - \mathbb{E}[X_0 Y_0] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})]$;

Solution : On développe le terme de droite et on utilise la question précédente :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})] &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k Y_k] + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_{k-1} Y_{k-1}] \\ &\quad - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k Y_{k-1}] - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_{k-1} Y_k] \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k Y_k] - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_{k-1} Y_{k-1}] \\ &= \mathbb{E}[X_n Y_n] - \mathbb{E}[X_0 Y_0] \end{aligned}$$

3. $\text{Var}(X_n) = \text{Var}(X_0) + \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k - X_{k-1})$;

Solution : C'est le théorème de Pythagore, en vertu de la question suivante.

4. Les variables aléatoires $X_0, (X_k - X_{k-1}), k \geq 1$, sont deux à deux orthogonales dans $\mathbb{L}^2$.

Solution : Voir le cours.

Exercice 3 *Différence de martingale*

Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale réelle telle que pour tout $n \geq 0$, $|M_n| \leq K$. On pose

$$X_n := \sum_{k=1}^n \frac{(M_k - M_{k-1})}{k}, \quad n \geq 0.$$

Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale qui converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^2$.

Solution : On vérifie aisément que (X_n) est une martingale de carré intégrable. D'après la dernière question de l'exercice précédent, on a alors

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2]}{k^2} \leq 4K^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 4K^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

En particulier $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[X_n^2] < +\infty$ i.e. la suite (X_n) est bornée dans $\mathbb{L}^2$, et d'après le cours elle converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^2$

Exercice 4 *Une martingale exponentielle*

Soit $(Y_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On pose $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ et $X_n := Y_1 + \dots + Y_n$ pour $n \geq 0$. Enfin, pour $u \in \mathbb{R}$ et $n \geq 0$, on pose

$$Z_n^u := \exp(uX_n - nu^2\sigma^2/2).$$

Montrer que Z_n^u est une martingale et qu'elle converge presque sûrement. Identifier la limite.

Solution : On vérifie aisément que la suite Z_n^u est adaptée et intégrable. Par ailleurs

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}^u | \mathcal{F}_n] = Z_n^u \times \mathbb{E}[e^{uY_{n+1} - u^2\sigma^2/2}] = Z_n^u, \quad \text{car } \mathbb{E}[e^{uY_1}] = e^{u^2\sigma^2/2}.$$

La suite (Z_n^u) est donc une martingale positive et d'après le cours, elle converge presque sûrement. D'après la loi forte des grands nombres, on sait que $X_n/n = o(1)$ presque sûrement, on en déduit que si $u \neq 0$, presque sûrement lorsque n tend vers l'infini :

$$Z_n^u = e^{uX_n - nu^2\sigma^2/2} = e^{n \times (uX_n/n - u^2\sigma^2/2)} = e^{-n(u^2\sigma^2/2 + o(1))} \longrightarrow 0.$$

Exercice 5 *Martingale produit*

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mu = 1/2(\delta_0 + \delta_2)$. On pose $Y_n := X_1 \times \dots \times X_n$.

1. La suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ est-elle une martingale ?

Solution : Oui car les X_i sont indépendantes et $\mathbb{E}[X_1] = 1$.

2. La suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ est-elle bornée dans $\mathbb{L}^1$?

Solution : On remarque que Y_n ne prend que 2 valeurs, 0 si l'un des X_i est nul, ou 2^n si tous les X_i sont non nuls. On a donc $\mathbb{P}(Y_n = 2^n) = \mathbb{P}(\forall i \in \{1, \dots, n\}, X_i = 2) = 2^{-n}$ et $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - 2^{-n}$. On en déduit que $\mathbb{E}[Y_n] = 2^n \mathbb{P}(Y_n = 2^n) = 1$, et la suite (positive) est bien bornée dans $\mathbb{L}^1$.

3. La suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle ? Si oui, identifier sa limite.

Solution : D'après le cours, la martingale (Y_n) converge presque sûrement. Sa limite est nulle presque sûrement. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\sum_n \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) = \sum_n 2^{-n} < +\infty$ et d'après le lemme de Borel-Cantelli $\mathbb{P}(\limsup\{|Y_n| > \varepsilon\}) = 0$ i.e. presque sûrement, à partir d'un certain rang $|Y_n| \leq \varepsilon$ et donc $|Y_n| = 0$.