

CORRECTION DE LA FEUILLE D'EXERCICES # 1

Exercice 1 : Mesurabilité

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que Y est $\sigma(X)$ -mesurable si et seulement si il existe une fonction borélienne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$. Indication : on pourra commencer en supposant Y étagée.

Solution : Traitons tout d'abord le cas où la variable Y est discrète, autrement dit $Y = \sum_i y_i \mathbb{1}_{A_i}$ avec $A_i \in \mathcal{F}$. Comme Y est $\sigma(X)$ -mesurable, $A_i = Y^{-1}(y_i) \in \sigma(X)$ donc il existe $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $A_i = X^{-1}(B_i)$ de sorte que

$$Y = \underbrace{\left(\sum_i y_i \mathbb{1}_{B_i} \right)}_{:=f} \circ X,$$

où la fonction (étagée) f est bien mesurable. Dans le cas général, on peut supposer sans perdre en généralité que la variable Y est positive, auquel cas elle est la limite presque sûre d'une suite croissante de fonctions étagées positives et le résultat est obtenu à partir du premier cas par passage à la limite.

Exercice 2 : Singletons, tribu et conditionnement

On considère l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. Soient X la variable aléatoire définie par $X(\omega) = \cos(\pi\omega)$ et \mathcal{G} l'ensemble formé des éléments $A \subseteq]0, 1[$, tels que A ou A^c est dénombrable.

1. Vérifier que \mathcal{G} est une tribu. Quel est le lien entre \mathcal{G} et les singletons de $]0, 1[$?

Solution : On vérifie facilement que la tribu \mathcal{G} est en fait la tribu engendrée par les singletons de $]0, 1[$, i.e. $\mathcal{G} = \sigma(\{x\}, x \in]0, 1[)$.

2. Montrer que $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = 0$ presque sûrement.

Solution : Tout d'abord, la fonction nulle est bien \mathcal{G} -mesurable ! Ensuite, il suffit de vérifier que pour tout $G \in \mathcal{G}$, $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_G] = 0$. Soit donc $G \in \mathcal{G}$, deux cas se présentent. Soit G est un ensemble dénombrable, auquel cas on a naturellement

$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_G] = \int_G \cos(\pi\omega) d\omega = 0.$$

Soit le complémentaire de G est dénombrable, auquel cas on a aussi

$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_G] = \int_G \cos(\pi\omega) d\omega = \int_0^1 \cos(\pi\omega) d\omega - \int_{G^c} \cos(\pi\omega) d\omega = 0.$$

Exercice 3 : Variables positives et conditionnement

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, \mathcal{G} une sous tribu de \mathcal{F} et X une variable aléatoire réelle positive. Montrer que l'ensemble $\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) > 0\}$ est le plus petit ensemble \mathcal{G} -mesurable (aux négligeables près) qui contient $\{X > 0\}$.

Solution : Désignons par B l'ensemble \mathcal{G} -mesurable $\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) > 0\}$. Vérifions tout d'abord que B contient bien l'ensemble $\{X > 0\}$. Par définition de l'espérance conditionnelle, on a

$$\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{B^c}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbf{1}_{B^c}].$$

L'intégrande dans le membre de droite de cette égalité est nulle presque sûrement par définition de B , on en déduit que la variable $X\mathbf{1}_{B^c}$ est elle aussi nulle presque sûrement, i.e. $\{X > 0\} \cap B^c = \emptyset$ ou encore $\{X > 0\} \subset B$. Soit maintenant A un ensemble \mathcal{G} -mesurable qui contient $\{X > 0\}$. On veut montrer que A contient B ou encore que $B \cap A^c = \emptyset$. Or $B \cap A^c \subset \{X = 0\}$ est \mathcal{G} -mesurable de sorte que par définition de l'espérance conditionnelle :

$$0 = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{B \cap A^c}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbf{1}_{B \cap A^c}].$$

On a donc $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbf{1}_{B \cap A^c} = 0$ presque sûrement d'où $B \cap A^c = \emptyset$.

Exercice 4 : Inégalité de Cauchy-Schwarz conditionnelle

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, \mathcal{G} une sous tribu de \mathcal{F} et X, Y deux variables aléatoires réelles telles que $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ et $\mathbb{E}(Y^2) < +\infty$. En considérant le fait que $\mathbb{E}[(X + \theta Y)^2|\mathcal{G}] \geq 0$ p.s. pour tout $\theta \in \mathbb{Q}$, établir l'inégalité $\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}]^2 \leq \mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}]\mathbb{E}[Y^2|\mathcal{G}]$ p.s.

Solution : D'après le "lemme de positivité" du cours, pour tout $\theta \in \mathbb{Q}$, on a

$$\mathbb{E}[(X + \theta Y)^2|\mathcal{G}] \geq 0 \text{ p.s..}$$

L'ensemble \mathbb{Q} étant dénombrable, on peut échanger le "pour tout" et le "presque sûrement". En développant l'intégrande et en utilisant la linéarité de l'espérance conditionnelle, on obtient alors que presque sûrement, pour tout $\theta \in \mathbb{Q}$:

$$\mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}] + 2\theta\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] + \theta^2\mathbb{E}[Y^2|\mathcal{G}] \geq 0.$$

Le membre de gauche de l'inégalité, vu comme polynôme de degré 2 en θ , a alors nécessairement un discriminant négatif ou nul, i.e.

$$4\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}]^2 - 4\mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}]\mathbb{E}[Y^2|\mathcal{G}] \leq 0,$$

d'où le résultat.

Exercice 5 : *Conditionnement par une variable discrète*

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{x_1, x_2, \dots\}$. Si Y est une variable aléatoire intégrable, montrer que l'on a

$$\mathbb{E}[Y|X] = \sum_{i \geq 1} \frac{\mathbb{E}[Y \mathbf{1}_{X=x_i}]}{\mathbb{P}(X = x_i)} \mathbf{1}_{X=x_i}$$

Solution : Le membre de droite est bien une fonction mesurable par rapport à $\mathcal{G} := \sigma(X)$. On vérifie ensuite facilement que pour tout atome $G_j := \{X = x_j\} \in \mathcal{G}$, on a bien

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i \geq 1} \frac{\mathbb{E}[Y \mathbf{1}_{X=x_i}]}{\mathbb{P}(X = x_i)} \mathbf{1}_{X=x_i} \right) \mathbf{1}_{G_j} \right] = \mathbb{E}[Y \mathbf{1}_{G_j}],$$

et le résultat se généralise naturellement la tribu \mathcal{G} tout entière, dont les éléments s'écrivent comme union au plus dénombrable des atomes G_i .

Exercice 6 : *Caractérisation de l'indépendance*

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si pour toute application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée on a :

$$\mathbb{E}(g(Y)|X) = \mathbb{E}(g(Y)) \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Solution : Supposons que les variables X et Y sont indépendantes et considérons une fonction mesurable bornée g . La constante $\mathbb{E}[g(Y)]$ est bien $\sigma(X)$ -mesurable. Ensuite, si h est une nouvelle fonction mesurable bornée, on a par indépendance

$$\mathbb{E}[g(Y)h(X)] = \mathbb{E}[g(Y)]\mathbb{E}[h(X)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[g(Y)]h(X)],$$

ce qui assure que $\mathbb{E}[g(Y)]$ est bien une version de $\mathbb{E}(g(Y)|X)$. Réciproquement, si pour toute fonction g mesurable bornée, on a $\mathbb{E}(g(Y)|X) = \mathbb{E}(g(Y)) \quad \mathbb{P} - p.s.$, alors en prenant $g = \mathbf{1}_B$ et $h = \mathbf{1}_A$ avec A et B des boréliens de \mathbb{R} , on a

$$\mathbb{E}[g(Y)h(X)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[g(Y)]h(X)],$$

autrement dit

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B),$$

et les variables X et Y sont bien indépendantes.

Application : soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité $p(x, y) = e^{-y} \mathbf{1}_{0 < x < y}$. Calculer la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$. En déduire que X et $X - Y$ sont indépendantes.

Solution : Soit g une fonction mesurable bornée. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(Y - X)|X = x] &= \frac{\int_x^{+\infty} g(y - x) e^{-y} dy}{\int_x^{+\infty} e^{-y} dy} \\ &= \int_x^{+\infty} g(y - x) e^{-(y-x)} dy = \int_0^{+\infty} g(u) e^{-u} du. \end{aligned}$$

Le membre de droite ne dépend pas de x , i.e. $\mathbb{E}[g(Y - X)|X]$ ne dépend pas de X et d'après ci-dessus, les variables X et $Y - X$ sont indépendantes.