Correction de la feuille d'exercices # 0

Exercice 1 : *Variables aléatoires réelles et moments*

1. Montrer qu'une variable aléatoire réelle positive dont l'espérance est nulle est nulle presque sûrement.
   Solution : Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}^+$ une variable aléatoire réelle positive. Pour tout $n \geq 1$, définissons $A_n \in \mathcal{F}$ en posant $A_n = \{X \geq 1/n\}$. La suite d'évènement $(A_n)_{n\geq 1}$ est croissante et vérifie $\bigcup_{n\geq 1} A_n = \{X > 0\}$. On en déduit que la probabilité $\mathbb{P}(X > 0)$ est la limite des $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(X \geq 1/n)$ lorsque n tend vers l'infini. Supposons $\mathbb{P}(X > 0) > 0$. Alors il existe un entier $n \geq 1$ tel que $P(X \geq 1/n) > 0$. On a donc
   $$\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{\{X \geq 1/n\}}] \geq \frac{1}{n}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X\geq 1/n\}}] \geq \frac{1}{n}\mathbb{P}(X \geq 1/n) > 0.$$
   Nous venons de montrer que si X n'est pas presque sûrement nulle, alors son espérance est strictement positive. La contraposée de cette assertion est ce qu'on nous demandait de démontrer.
2. Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que $\{x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X = x) > 0\}$ est un ensemble au plus dénombrable.
   Solution : Soit $n \geq 1$. Montrons que l'ensemble $M_n = \{x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = x) \geq 1/n\}$ a au plus n éléments. Pour cela, considérons k éléments distincts $x_1, \ldots, x_k$ de cet ensemble. On a
   $$1 = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) \geq \mathbb{P}(X \in \{x_1, \ldots, x_k\}) = k/n.$$
   Ainsi, $k \leq n$ i.e. $\#(M_n) \leq n$. On observe maintenant que la réunion des ensembles M_n lorsque n parcourt $\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{P}(X = x) > 0$. Cet ensemble, qui est une réunion dénombrable d'ensembles finis, est donc dénombrable.
3. Soit $m \geq 1$ un entier. Donner un exemple d'une variable aléatoire réelle qui admet un moment d'ordre m mais pas de moment d'ordre $m + 1$.
   Solution : Notons, pour tout $s > 1$, $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}$. Considérons une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \geq 1$ on ait
   $$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(m+2)} \times \frac{1}{n^{m+2}}.$$
   Alors d'une part
   $$\mathbb{E}[X^m] = \frac{1}{\zeta(m+2)} \times \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\zeta(2)}{\zeta(m+2)} < +\infty$$
   donc X admet un moment d'ordre m et, d'autre part,
   $$\mathbb{E}[X^{m+1}] = \frac{1}{\zeta(m+2)} \times \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Exercice 2 : *Gaussienne et changements de variables*
Soit (X,Y) un vecteur aléatoire sur $\mathbb{R}^2$ dont la loi admet la densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Déterminer les lois de X, Y, $X+Y$, X^2+Y^2.
Solution : Le couple (X,Y) est un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0,Id)$. Les variables X et Y sont donc des variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$, leur somme est une variable $\mathcal{N}(0,2)$ et la somme des carrés est une variable de loi gamma $\Gamma(1,1/2)$ c'est-à-dire une variable exonentielle de paramètre $1/2$.

Exercice 3 : *Indépendance*

1. Déterminer à quelle condition une variable aléatoire réelle est indépendante d'elle-même.
   Solution : Si la variable X est indépendante d'elle-même, alors on a $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X]^2$ donc $\mathrm{var}(X) = 0$ et X est constante presque sûrement.
2. Montrer que si la somme de deux variables aléatoires discrètes indépendantes a la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, alors l'une des deux variables aléatoires est constante.
   Indication : On raisonne par l'absurde en supposant que les deux variables peuvent prendre au moins deux valeurs distinctes, alors la somme prend au moins trois valeurs.
3. Soient $N_1, \ldots, N_r$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \ldots ; \lambda_r$. Déterminer la loi de $N_1 + \ldots + N_r$.
   Solution : En utilisant la fonction caractéristique, on montre facilement que $N_1 + \ldots + N_r$ est une variable de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r$.

Exercice 4 : *Convergence de variables aléatoires*

1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Soient $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'évènements sur cet espace et $p \geq 1$ un réel. Déterminer pour chacune des convergences suivantes à quelle condition sur la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ elle a lieu.
   (a) La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
   Solution : Supposons que $(\mathbb{1}_{A_n})$ converge vers 0 en probabilité. Alors en particulier, $\mathbb{P}(\mathbb{1}_{A_n} > 1/2) = \mathbb{P}(A_n)$ tend vers 0. Réciproquement, si $\mathbb{P}(A_n)$ converge vers 0, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\mathbb{1}_{A_n} > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(A_n)$ converge vers 0. Finalement la condition est $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.
   (b) La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{L}^p$ vers 0.
   Solution : Comme $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_n}^p] = \mathbb{P}(A_n)$, la condition est encore $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.
   (c) La suite $((\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.
   Solution : Soit $\omega \in \Omega$. La suite $(\mathbb{1}_{A_n}(\omega))$ converge vers 0 si et seulement si elle est stationnaire, égale à 0 à partir d'un certain rang. Ceci a lieu si et seulement si ω appartient à $\liminf A_n^c$, qui est le complémentaire de $\limsup A_n$. Ainsi, la convergence a lieu presque sûrement si et seulement si $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $\sum_{n\geq 1} X_n$ converge presque sûrement. Montrer que pour tout réel $c > 0$, on a $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > c) < +\infty$.
   Solution : Si on avait $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > c) = +\infty$, alors l'indépendance des $(X_n)_{n\geq 1}$ et la deuxième partie du lemme de Borel-Cantelli entraînerait que $|X_n| > c$ infiniment souvent

avec probabilité 1. Or sur l'évènement $\{|X_n| > c$ infiniment souvent$\}$, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0 si bien qu'en particulier la série $\sum_{n\geq 1} X_n$ ne converge pas. Ceci contredit l'hypothèse.

3. Construire une suite de variables aléatoires intégrables $(X_n)_{n\geq 1}$ et une variable aléatoire intégrable X telles qu'on ait $X_n \xrightarrow{loi} X$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n] \neq \mathbb{E}[X]$.
Considérons, pour tout $n \geq 1$, une variable aléatoire X_n dont la loi est donnée par
$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}.$$
Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$. On a alors $\mathbb{E}[f(X_n)] = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(0) + \frac{f(n)}{n}$ donc $|E[f(X_n)] - f(0)| \leq ||f||_\infty/n \to 0$ et la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers 0. Mais pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{E}[X_n] = 1$, qui ne converge pas vers 0.

4. Montrer que si une suite de variables aléatoires converge en loi et si chaque terme de la suite a une loi exponentielle, alors la loi limite est exponentielle ou la masse de Dirac en 0.
Solution : La convergence en loi est équivalente à la convergence pontuelle de la transformée de Laplace. Par ailleurs, si $X_n \sim \mathcal{E}(\lambda_n)$ alors $\phi_{X_n}(t) = \mathbb{E}[e^{-tX_n}] = \lambda_n/(\lambda_n + t)$. Autrement dit, si X_n converge en loi, la suite λ_n est convergente dans $(0, +\infty]$. Si la limite $\lambda_\infty := \lim \lambda_n$ est finie, la loi limite est une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda_\infty)$, si la limite est infinie, la variable limite est nulle presque sûrement.

Exercice 5 : *Loi des grands nombres et théoreme limite central*

1. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes toutes de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Que peut-dire de la suite
$$\frac{f(U_1) + \ldots + f(U_n)}{n}$$
lorsque n tend vers $+\infty$?
Solution : La fonction f, continue sur le segment $[0, 1]$, y est bornée. Ainsi, les variables aléatoires $(f(U_n))_{n\geq 1}$ sont indépendantes, de même loi et admettent un moment d'ordre 1. On peut leur appliquer la loi forte des grands nombres de sorte que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(U_1) + \ldots + f(U_n)}{n} = \mathbb{E}[f(U_1)] = \int_0^1 f(t)dt.$$

2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$. Plus généralement, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée, montrer que l'on a
$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right) \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-t^2/2} dt.$$
Solution : Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables de Poisson indépendantes de paramètre 1. Alors
$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n \leq n) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \leq 1\right).$$

D'après la loi des grands nombres, le membre de droite converge vers 1 car $\mathbb{E}[X_1] = 1$. On remarque ensuite que

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right) \frac{n^k}{k!} = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

de sorte que le résultat attendu est une conséquence directe du théorème limite central.

3. Un écrivain qui commet en moyenne une faute d'orthographe toutes les 10 pages vient d'écrire un roman de 400 pages. Quelle est la probabilité qu'il ait commis plus de 50 fautes ?
Solution : On modélise la présence d'une erreur/page par des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre 1/10. Le nombre d'erreur pour 400 pages suit alors une loi binomiale $\mathcal{B}(400, 1/10)$. Ensuite, on utilise l'approximation de la loi binomiale centrée/réduite par la loi gaussienne centrée/réduite.
4. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. définies sur le même espace probabilisé et telle que la suite des sommes partielles renormalisées $S_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers une variable $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que X_1 est de carré intégrable, avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$.
Solution : voir la page 8 de `http://math.univ-lille1.fr/~suquet/Polys/TLC.pdf`