Éléments de correction du contrôle continu # 2

Exercice 1 *Classification et absorption*
Sur l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$, on considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de matrice de transition :

$$Q := \begin{pmatrix} 4/10 & 3/10 & 3/10 & 0 & 0 \\ 0 & 5/10 & 0 & 5/10 & 0 \\ 5/10 & 0 & 5/10 & 0 & 0 \\ 0 & 5/10 & 0 & 5/10 & 0 \\ 0 & 3/10 & 0 & 3/10 & 4/10 \end{pmatrix}.$$

1. Quels sont les états récurrents, transitoires ?
   Solution : pour abréger, nous dirons que x mène à y s'il existe un chemin de longueur finie entre x et y. On remarque que 1 mène a 2 mais 2 ne mène pas à 1, donc 1 est transitoire. De même 3 mène à 2 mais 2 ne mène pas à 3, et 5 mène à 2 mais 2 ne mène pas à 5. Par contre, 2 mène à 4 et 4 mène à 2. Ainsi, il y trois états transitoires, $E_T = \{1,3,5\}$, et une unique classe de récurrence, $E_R = \{2,4\}$.
2. Déterminer la (ou les) loi(s) stationnaire(s).
   Solution : il n'y a qu'une classe de récurrence donc la chaîne est irréductible et il y a unicité de la loi stationnaire $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$. On a alors sans calcul $\pi_1 = \pi_3 = \pi_5 = 0$, car la loi invariante ne charge pas les états stationnaires. Il reste à résoudre le système $\pi P = \pi$ avec les deux équations restantes : ceci donne $\pi_2 = \pi_4 = 1/2$.
3. Sans faire aucun calcul, déterminer les probabilités d'absorption dans la (ou les) classe(s) de récurrence.
   Solution : Il y a une seule classe de récurrence, donc la probabilité d'y être absorbé partant d'un état transitoire est égale à 1.

Exercice 2 *Ruine du petit joueur*
A joue contre B une suite de pile ou face non biaisés et indépendants. À chaque partie, le joueur qui gagne reçoit 1 euro, l'autre en perd un. La somme de leurs fortunes, constante au cours du jeu, est de 4 euros. Le jeu s'arrête lorsque l'un des deux joueurs est ruiné. On modélise l'évolution de la fortune de A par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E = \{0,1,2,3,4\}$ dont la matrice de transition donnée ci-dessous. On admettra que lorsque n tend vers l'infini, la puissance $n-$ième de la matrice Q converge vers la matrice Q_∞ également donnée ci-dessous.

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_\infty := \lim_{n\to+\infty} Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Établir la classification des états de la chaîne ?
   Solution : Les états 0 et 4 sont absorbants (donc récurents) et les états $\{1,2,3\}$ mènent à 0 et 4, ils sont donc transitoires.

2. En déduire que lorsque n tend vers l'infini, X_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire X_∞.
   Solution : Partant de tout état i, $\mathbb{P}_i-$presque sûrement, le temps d'atteinte de l'ensemble $\{0,4\}$ est fini. La suite est alors stationnaire, donc convergente. On conclut que $\mathbb{P}_i-$presque sûrement, la suite converge vers une variable aléatoire à valeur dans $\{0,4\}$.
3. Si $X_0 \sim \mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$, déterminer la loi de X_∞.
   Solution : La loi μ_∞ de X_∞ est donnée par $\mu_\infty = \mu_0 Q_\infty$

$$\mu_\infty = \left(\mu_0 + \frac{3}{4}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 + \frac{1}{4}\mu_3, 0, 0, 0, \frac{1}{4}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 + \frac{3}{4}\mu_3 + \mu_4\right).$$

   Au final, l'un des deux joueurs sera ruiné, et ce avec une probabilité qui dépend de la répartition initiale des 4 euros. Par exemple si A part avec 1 euro, alors il a trois chances sur quatre de finir ruiné, tandis que s'il part avec 2 euros, il n'a qu'une chance sur deux de finir ruiné.
4. Montrer que tout probabilité invariante π pour la chaîne est nécessairement de la forme $\pi = (p, 0, 0, 0, 1-p)$, avec $p \in [0,1]$.
   Solution : La loi invariante ne charge pas les états stationnaires et la somme de ses coefficients vaut 1, on a donc naturellement $\pi = (p, 0, 0, 0, 1-p)$ avec $p \in [0,1]$.
5. Calculer les probabilités que le joueur A gagne le jeu, en fonction de sa fortune initiale $X_0 \in \{0,1,2,3,4\}$.
   Solution : La probabilité que A gagne le jeu est la probabilité que sa fortune X_n atteigne 4 euros. Notons $T_4 := \inf\{n \geq 0,\ X_n = 4\}$. On cherche donc les probabilités $m_i = \mathbb{P}_i(T_4 < \infty)$. D'après le cours, ces probabilités vérifient le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{l} m_0 = 0 \\ m_1 = \frac{1}{2}m_0 + \frac{1}{2}m_2 \\ m_2 = \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_3 \\ m_3 = \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_4 \\ m_4 = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m_0 = 0 \\ m_1 = \frac{1}{4} \\ m_2 = \frac{1}{2} \\ m_3 = \frac{3}{4} \\ m_4 = 1. \end{array}\right.$$

6. Question facultative : en déduire la durée moyenne de la partie, conditionnellement à ce que le joueur A gagne le jeu, en fonction de $X_0 \in \{1,2,3,4\}$.
   Solution : D'après le cours, si on pose $\tau_i^* = \mathbb{E}_i[T_4 \mathbb{1}_{T_4 < +\infty}]$, on a

$$\left\{\begin{array}{l} \tau_1^* = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\tau_2^* \\ \tau_2^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau_1^* + \frac{1}{2}\tau_3^* \\ \tau_3^* = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\tau_2^* + \frac{1}{2}\tau_4^* \\ \tau_4^* = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \tau_1^* = \frac{5}{4} \\ \tau_2^* = 2 \\ \tau_3^* = \frac{7}{4} \\ \tau_4^* = 0. \end{array}\right.$$

   Finalement, si on pose $\tau_i = \mathbb{E}_i[T_4 | T_4 < +\infty] = \tau_i^*/m_i$, on trouve :

$$\tau_1 = 5, \quad \tau_2 = 4, \quad \tau_3 = 7/3, \quad \tau_4 = 0.$$