Correction du contrôle continu # 1

Exercice 1 : *Parties entière et fractionnaire d'une variable exponentielle*
Pour $x > 0$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière et $\{x\}$ la partie fractionnaire de x :

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}, \ \ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \ \text{ et } \ \{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[.$$

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1, i.e. X admet la densité $x \mapsto e^{-x}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$. On note $Y := \lfloor X \rfloor$, et $Z := \{X\}$ de sorte que $X = Y + Z$.

1. En calculant $\mathbb{P}(Y = k, \ Z \in [s, t])$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $s, t \in [0, 1[$, déterminer la loi du couple (Y, Z). Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?
   Solution : Pour $k \in \mathbb{N}$ et $s, t \in [0, 1[$, on a

$$\mathbb{P}(Y = k, \ Z \in [s, t]) = \mathbb{P}(k + s \leq X \leq k + t) = \int_{k+s}^{k+t} e^{-x} dx = e^{-k}(e^{-s} - e^{-t}),$$

   dont on déduit que

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y = k, \ Z \in [0, 1]) = e^{-k}(1 - e^{-1}), \ i.e. \ Y + 1 \sim \mathcal{G}(p) \text{ avec } p = 1 - e^{-1},$$

$$\mathbb{P}(Z \in [s, t]) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Y = k, \ Z \in [s, t]) = \frac{e^{-s} - e^{-t}}{1 - e^{-1}}, \ i.e. \ Z \text{ a pour densité } x \mapsto \frac{e^{-x}}{1 - e^{-1}}.$$

   En particulier, on a $\mathbb{P}(Y = k, \ Z \in [s, t]) = \mathbb{P}(Y = k) \times \mathbb{P}(Z \in [s, t])$ et les variables Y et Z sont indépendantes.

2. Déterminer (sans calculs ou presque !) les espérances conditionnelles suivantes :

$$\mathbb{E}[Y|Z], \ \ \mathbb{E}[Z|Y], \ \ \mathbb{E}[Y|X], \ \ \mathbb{E}[Z|X], \ \ \mathbb{E}[X|Y], \ \ \mathbb{E}[X|Z].$$

   Solution : On a tout d'abord

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1, \quad \mathbb{E}[Z] = \int_0^1 \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-1}} dx = \frac{1 - 2e^{-1}}{1 - e^{-1}},$$

   et comme $X = Y + Z$, on en déduit que $\mathbb{E}[Y] = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}}$. Ensuite
   – comme Y et Z sont indépendantes, il vient

$$\mathbb{E}[Y|Z] = \mathbb{E}[Y], \ \ \mathbb{E}[Z|Y] = \mathbb{E}[Z],$$

   – puisque $Y := \lfloor X \rfloor$ et $Z := \{X\}$ sont $\sigma(X)-$mesurables :

$$\mathbb{E}[Y|X] = Y, \ \ \mathbb{E}[Z|X] = Z,$$

   – enfin comme $X = Y + Z$:

$$\mathbb{E}[X|Y] = Y + \mathbb{E}[Z], \quad \mathbb{E}[X|Z] = Z + \mathbb{E}[Y].$$

Exercice 2 : *Urne de Pólya (le retour)*
Soient a, b, c trois entiers supérieurs ou égaux à 1. Une urne contient a boules rouges et b boules blanches. On tire une boule au hasard (uniformément) dans l'urne, on regarde sa couleur, puis on la replace en ajoutant c boules de la même couleur, ce qui donne la nouvelle composition de l'urne après l'instant 1. On itère ensuite la même procédure. Après l'instant n, il y a ainsi $a + b + nc$ boules dans l'urne. On désigne par X_n le nombre de boules rouges dans l'urne après l'instant n, par $M_n = \frac{X_n}{a+b+nc}$ la proportion de boules rouges et par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n) = \sigma(M_0, \dots, M_n)$ la tribu engendrée.

1. Montrer que l'on a la décomposition $X_n = a + c\sum_{k=1}^n \varepsilon_k$ où, pour tout $n \geq 1$, la loi conditionnelle $\mathcal{L}(\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ est une loi de Bernoulli de paramètre p_n à préciser.

   Solution : Par construction, on a $X_{n+1} = X_n + c$ si une boule rouge est tirée et $X_{n+1} = X_n$ sinon. Autrement dit $X_{n+1} = X_n + c\,\varepsilon_{n+1}$ où ε_{n+1} est une variable de Bernoulli à valeurs dans $\{0, 1\}$, de paramètre $p_{n+1} = M_n$ la proportion de boules rouges à l'instant n. Comme $X_0 = a$, on a alors naturellement $X_n = a + c\sum_{k=1}^n \varepsilon_k$ pour $n \geq 1$.

2. En déduire que $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = (a + b + c(n + 1))M_n$ et que la suite (M_n) est une martingale qui converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers une variable aléatoire $M_\infty \in \mathbb{L}^1$.

   Solution : Du point précédent, on déduit que $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n + c\,\mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n + cM_n$, ou encore $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = (a + b + c(n + 1))M_n$ i.e. $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$. La suite (M_n) étant adaptée et intégrable (elle est bornée $|X_n| \leq 1$), c'est donc une martingale qui d'après le cours converge p.s. et dans $\mathbb{L}^1$ vers une limite $M_\infty \in \mathbb{L}^1$.

3. Dans le cas particulier où $a = b = c$, montrer par récurrence que la variable aléatoire X_n est uniformément distribuée sur $\{a, 2a, \dots, (n + 1)a\}$ et que la limite M_∞ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

   L'hypothèse de récurrence est vrai au rang zéro : $X_0 \sim \delta_a$. Supposons l'hypothèse vraie au rang n, i.e. $\mathbb{P}(X_n = ka) = 1/(n + 1)$ pour tout entier $k \in \{1, \dots, n + 1\}$. Alors, pour $k \in \{2, \dots, (n + 1)\}$, on a

   $$\mathbb{P}(X_{n+1} = ka) = \mathbb{P}(X_{n+1} = ka,\ X_n = ka) + \mathbb{P}(X_{n+1} = ka,\ X_n = (k - 1)a)$$

   $$= \mathbb{P}(X_{n+1} = ka|X_n = ka)\mathbb{P}(X_n = ka) + \mathbb{P}(X_{n+1} = ka, |X_n = (k - 1)a)\mathbb{P}(X_n = (k - 1)a)$$

   $$= \left(1 - \frac{ka}{(n + 2)a}\right) \times \frac{1}{n + 1} + \frac{(k - 1)a}{(n + 2)a} \times \frac{1}{n + 1} = \frac{1}{n + 2}.$$

   De manière analogue :

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = a) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = a,\ X_n = a) = \mathbb{P}(X_{n+1} = a|X_n = a)\mathbb{P}(X_n = a) \\ &= \left(1 - \frac{a}{(n + 2)a}\right) \times \frac{1}{n + 1} = \frac{1}{n + 2},\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = (n+2)a) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = (n+2)a,\ X_n = (n+1)a) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = (n+2)a | X_n = (n+1)a)\mathbb{P}(X_n = (n+1)a) \\
&= \left(\frac{(n+1)a}{(n+2)a}\right) \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2}.
\end{aligned}
$$

La loi de X_{n+1} est donc bien la loi uniforme sur $\{a, 2a, \ldots, (n+2)a\}$. En normalisant, on obtient que la loi de M_n est la loi uniforme sur $\{1/(n+2), \ldots, (n+1)/(n+2)\}$. Autrement dit, la fonction de répartition de M_n est donnée par :

$$
\mathbb{P}(M_n \le x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < \frac{1}{n+2} \\ \\ \frac{k}{n+1} \text{ si } \frac{k}{n+2} \le x < \frac{k+1}{n+2} \\ \\ 1 \text{ si } x \ge \frac{n+1}{n+2}. \end{cases}
$$

Désignons par $F(x) := x\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \mathbb{1}_{]1,+\infty]}(x)$ la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$, i.e. . D'après ci-dessus, on a

$$
\sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(M_n \le x) - F(x)| \le \frac{1}{n+2}.
$$

Lorsque n tend vers l'infini, la suite (M_n) converge donc en loi vers une variable de loi uniforme sur $[0, 1]$, et on conclut que $M_\infty \sim U_{[0,1]}$.

Exercice 3 : *Famille uniformément intégrable*
Soient X une variable aléatoire réelle intégrable et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \lambda_n \times X$.

1. Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable et si $\mathbb{P}(X \neq 0) > 0$ alors la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nécessairement bornée, i.e. $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| < +\infty$.

   Solution : Supposons que la suite (X_n) est uniformément intégrable. En particulier, elle est bornée dans $\mathbb{L}^1$:
   $$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|] < +\infty.$$
   Comme $\mathbb{E}[|X_n|] = |\lambda_n|\mathbb{E}[|X|]$ et que $\mathbb{E}[|X|] > 0$ car $\mathbb{P}(X \neq 0) > 0$, on en déduit que
   $$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| = \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|]}{\mathbb{E}[|X|]} < +\infty.$$

2. Montrer que si la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable.

   Solution : Si $\Lambda := \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| < +\infty$, alors pour tout $n, N > 0$:
   $$\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{|X_n|>N}] = |\lambda_n|\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{|X|>N/\lambda_n}] \le \Lambda\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{|X|>N/\Lambda}].$$
   Le dernier terme tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini car $\{X\}$ est uniformément intégrable, d'où le résultat.