Contrôle continu # 2

Durée 1 heure, aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 *Classification et absorption*
Sur l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$, on considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de matrice de transition :

$$Q := \begin{pmatrix} 4/10 & 3/10 & 3/10 & 0 & 0 \\ 0 & 5/10 & 0 & 5/10 & 0 \\ 5/10 & 0 & 5/10 & 0 & 0 \\ 0 & 5/10 & 0 & 5/10 & 0 \\ 0 & 3/10 & 0 & 3/10 & 4/10 \end{pmatrix}.$$

1. Quels sont les états récurrents, transitoires ?
2. Déterminer la (ou les) loi(s) stationnaire(s).
3. Sans faire aucun calcul, déterminer les probabilités d'absorption dans la (ou les) classe(s) de récurrence.

Exercice 2 *Ruine du petit joueur*
A joue contre B une suite de pile ou face non biaisés et indépendants. À chaque partie, le joueur qui gagne reçoit 1 euro, l'autre en perd un. La somme de leurs fortunes, constante au cours du jeu, est de 4 euros. Le jeu s'arrête lorsque l'un des deux joueurs est ruiné. On modélise l'évolution de la fortune de A par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E = \{0,1,2,3,4\}$ dont la matrice de transition donnée ci-dessous. On admettra que lorsque n tend vers l'infini, la puissance $n-$ième de la matrice Q converge vers la matrice Q_∞ également donnée ci-dessous.

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_\infty := \lim_{n\to+\infty} Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Établir la classification des états de la chaîne ?
2. En déduire que lorsque n tend vers l'infini, X_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire X_∞.
3. Si $X_0 \sim \mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$, déterminer la loi de X_∞.
4. Montrer que tout probabilité invariante π pour la chaîne est nécessairement de la forme $\pi = (p, 0, 0, 0, 1-p)$, avec $p \in [0,1]$.
5. Calculer les probabilités que le joueur A gagne le jeu, en fonction de sa fortune initiale $X_0 \in \{0,1,2,3,4\}$.
6. Question facultative : en déduire la durée moyenne de la partie, conditionnellement à ce que le joueur A gagne le jeu, en fonction de $X_0 \in \{1,2,3,4\}$.