Université de Rennes 1 — Master 1 Mathématique
Martingales et chaînes de Markov — année 2012-2013

Contrôle continu # 1

Durée 1 heure, aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 : *Parties entière et fractionnaire d'une variable exponentielle*
Pour $x > 0$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière et $\{x\}$ la partie fractionnaire de x :

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}, \;\; \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \;\; \text{et} \;\; \{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[.$$

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1, i.e. X admet la densité $x \mapsto e^{-x}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$. On note $Y := \lfloor X \rfloor$, et $Z := \{X\}$ de sorte que $X = Y + Z$.

1. En calculant $\mathbb{P}(Y = k,\ Z \in [s, t])$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $s, t \in [0, 1[$, déterminer la loi du couple (Y, Z). Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer (sans calculs ou presque !) les espérances conditionnelles suivantes :

$$\mathbb{E}(Y|Z), \;\; \mathbb{E}(Z|Y), \;\; \mathbb{E}(Y|X), \;\; \mathbb{E}(Z|X), \;\; \mathbb{E}(X|Y), \;\; \mathbb{E}(X|Z).$$

   On pourra utiliser les formules :

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = 1 - 2e^{-1}, \qquad \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1.$$

Exercice 2 : *Urne de Pólya (le retour)*
Soient a, b, c trois entiers supérieurs ou égaux à 1. Une urne contient a boules rouges et b boules blanches. On tire une boule au hasard (uniformément) dans l'urne, on regarde sa couleur, puis on la replace en ajoutant c boules de la même couleur, ce qui donne la nouvelle composition de l'urne après l'instant 1. On itère ensuite la même procédure. Après l'instant n, il y a ainsi $a + b + nc$ boules dans l'urne. On désigne par X_n le nombre de boules rouges dans l'urne après l'instant n, par $M_n = \frac{X_n}{a+b+nc}$ la proportion de boules rouges et par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n) = \sigma(M_0, \ldots, M_n)$ la tribu engendrée.

1. Montrer que l'on a la décomposition $X_n = a + c \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$ où, pour tout $n \geq 1$, la loi conditionnelle $\mathcal{L}(\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ est une loi de Bernoulli de paramètre p_n à préciser.
2. En déduire que $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = (a + b + c(n + 1))M_n$ et que la suite (M_n) est une martingale qui converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers une variable aléatoire $M_\infty \in \mathbb{L}^1$.
3. Dans le cas particulier où $a = b = c$, montrer par récurrence que la variable aléatoire X_n est uniformément distribuée sur $\{a, 2a, \ldots, (n + 1)a\}$ et que la limite M_∞ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 3 : *Famille uniformément intégrable*
Soient X une variable aléatoire réelle intégrable et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \lambda_n \times X$.

1. Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable et si $\mathbb{P}(X \neq 0) > 0$ alors la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nécessairement bornée, i.e. $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| < +\infty$.
2. Montrer que si la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable.