

DEVOIR EN TEMPS LIBRE
à rendre avant 09.11.2012

L'objet des deux exercices du devoir est l'étude de processus dits autorégressifs. Ces suites chronologiques ont de très nombreuses applications en démographie, biologie, climatologie, économie, finance etc..

Exercice 1 *Processus auto-regressif - cas stable*

On considère la suite de variables aléatoires réelles (X_n) définie par $X_0 = 0$ et pour $n \geq 0$:

$$X_{n+1} = \theta X_n + \varepsilon_{n+1},$$

où θ est un paramètre inconnu tel que $0 < |\theta| < 1$ et où (ε_n) est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On dit que la suite (X_n) est un processus autorégressif d'ordre 1.

1. Montrer par récurrence que $X_n = \sum_{k=1}^n \theta^{n-k} \varepsilon_k$.
2. En déduire que, lorsque n tend vers l'infini :

$$X_n \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{1-\theta^2}\right).$$

On cherche à présent à deviner le paramètre inconnu θ à partir des observations. Plus précisément, on cherche à exhiber un estimateur consistant de θ , c'est-à-dire une fonction mesurable $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ des données jusqu'au temps n , dont l'expression ne dépend pas de θ , et qui converge presque sûrement vers θ lorsque n tend vers l'infini. On considère ainsi la suite

$$\hat{\theta}_n := \frac{\sum_{k=1}^n X_k X_{k-1}}{\sum_{k=1}^n X_{k-1}^2}.$$

3. On pose $M_n := \sum_{k=1}^n X_{k-1} \varepsilon_k$. Vérifier que (M_n) est une martingale de carré intégrable, calculer son compensateur prévisible $\langle M \rangle_n$ et montrer que l'on a la relation :

$$\hat{\theta}_n - \theta = \frac{M_n}{\langle M \rangle_n}.$$

4. Montrer en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$X_n^2 \leq \frac{1}{1-|\theta|} \sum_{k=1}^n |\theta|^{n-k} \varepsilon_k^2, \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n X_k^2 \leq \left(\frac{1}{1-|\theta|}\right)^2 \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2.$$

5. En déduire que presque sûrement $\langle M \rangle_n = O(n)$ et $M_n = o(n)$ lorsque n tend vers l'infini.
6. En remarquant que $(1-\theta^2)\langle M \rangle_{n+1} = -\theta^2 X_n^2 + 2\theta M_n + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2$, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\langle M \rangle_n}{n} = \frac{1}{1-\theta^2},$$

et en déduire que $\hat{\theta}_n$ est bien un estimateur consistant de θ .

Exercice 2 *Processus auto-regressif - cas explosif*

On considère maintenant un processus autorégressif à coefficients aléatoires, i.e. une suite (X_n) telle que $X_0 = 0$ et pour $n \geq 0$

$$X_{n+1} = \theta_{n+1}X_n + \varepsilon_{n+1},$$

où

- la suite (θ_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $\mathbb{E}[\theta_n] = \theta$ inconnu et $\mathbb{E}[\theta_n^2] = \tau^2 > \theta^2$,
- la suite (ε_n) est une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées avec $\mathbb{E}[\varepsilon_n] = 0$ et $\mathbb{E}[\varepsilon_n^2] = 1$,
- les suites (θ_n) et (ε_n) sont indépendantes.

On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ la filtration naturelle associée au modèle et on se place dans le cas dit explosif où $\tau^2 > 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{E}[\theta_{n+1}\varepsilon_{n+1}] = 0$,

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \theta X_n, \quad \mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = \tau^2 X_n^2 + 1.$$

2. Pour $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n^2/\tau^{2n}$. Montrer que la suite (Y_n) est une sous-martingale bornée dans $\mathbb{L}^1$.
3. En déduire que (Y_n) converge presque sûrement vers une variable aléatoire Y , puis en utilisant le lemme de Césàro que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau^{2n}} \sum_{k=1}^n X_k^2 = \left(\frac{\tau^2}{\tau^2 - 1} \right) Y \quad p.s..$$

Dans toute la suite, nous supposons que la variable limite Y est strictement positive presque sûrement. Comme dans l'exercice précédent, on souhaite donner un estimateur consistant du paramètre inconnu θ . On introduit les suites :

$$C_n := \sum_{k=1}^n \frac{X_k X_{k-1}}{1 + X_{k-1}^2}, \quad D_n := \sum_{k=1}^n \frac{X_{k-1}^2}{1 + X_{k-1}^2}, \quad M_n := C_n - \theta D_n.$$

On pose alors $\tilde{\theta}_n := C_n/D_n$ de sorte que $\tilde{\theta}_n - \theta = M_n/D_n$.

4. Montrer que la suite (M_n) est une martingale et que lorsque n tend vers l'infini $\langle M \rangle_n = O(n)$.
5. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, $n^{-1}D_n$ tend presque sûrement vers 1 et en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\theta}_n = \theta \quad p.s..$$