Université Rennes 1 — Master 1 Mathématique

Martingales et chaînes de Markov — année 2011-2012

Deuxième partiel

Exercice 1 : *Chaîne de Markov et temps d'atteinte*

On considère un processus à valeurs dans l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$, qui évolue de la façon suivante : il part de 1 ; à chaque étape, il ne peut sauter que vers un entier strictement supérieur (sauf s'il a déjà atteint 5 où il stationne) ; les successeurs sont choisis avec équiprobabilité.

1. Modélisez ce processus par une chaîne de Markov en précisant sa matrice de transition.
2. Calculer le nombre moyen de sauts nécessaires pour atteindre l'état 5.
3. On généralise le modèle en considérant le processus analogue à valeurs dans $\{1,2,\ldots,n\}$. Pour $1 \leq k \leq n-1$, on note b_k le nombre moyen de sauts nécessaires pour aller de $n-k$ à n. Montrer que l'on a la relation de récurrence :

$$b_k = 1 + \frac{1}{k}\left(b_1 + \ldots + b_{k-1}\right).$$

4. (Question facultative) En déduire que $b_k = \sum_{i=1}^{k} 1/i$.

Exercice 2 : *Arithmétique aléatoire*

On jette un dé à 6 faces n fois de suite. On note $X_i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ le résultat du $i-$ème lancer, et $(S_n)_{n\geq 0}$ et $(P_n)_{n\geq 0}$ la somme et le produit des résultats :

$$S_0 := 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \text{et} \quad P_0 := 1, \quad P_n := \prod_{i=1}^{n} X_i, \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

1. Montrer que S_n et P_n sont des chaînes de Markov. Sont-elles récurrentes ?
2. On considère la chaîne $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par $U_k := 5 \times S_k \bmod 10$. Quelles sont les valeurs possibles de U_n ? Sa matrice de transition P ? Calculer P^2 et en déduire P^n pour $n \geq 1$.

On introduit les nouvelles variables Y_k et Z_k, les restes de la division euclidienne de S_k par 13 et P_k par 3, ce pour $k = 1,\ldots,n$:

$$Y_k = S_k \bmod 13 \in \{0,1,\ldots,12\}, \quad Z_k = P_k \bmod 3 \in \{0,1,2\}.$$

3. Quel est la matrice de transition de la chaîne $(Z_n)_{n\geq 0}$? Classifier ses états.
4. Déterminer la limite $\mathbb{P}(Z_n = 1)$ lorsque n tend vers l'infini.
5. Montrer que la chaîne $(Y_n)_{n\geq 0}$ est irréductible.
6. On note D_k^0 la durée du $k-$ième séjour en zéro[1] de la chaîne $(Y_n)_{n\geq 0}$. Quelle est la loi de D_k^0 ?

[1]Formellement, si on pose $T_1 = 0$ et $U_1 = \inf\{n \geq 0,\ Y_n \neq 0\}$, puis $T_{k+1} = \inf\{n > U_k,\ Y_n = 0\}$, $U_{k+1} = \inf\{n > T_{k+1},\ Y_n \neq 0\}$, on a $D_k^0 = U_k - T_k$.