DEUXIÈME PARTIEL

Exercice 1 : Être ou ne pas être (markovien) ?

1. Une marche aléatoire auto-évitante est une marche aléatoire simple conditionnée à ne pas revenir en un site déjà visité. La marche aléatoire auto-évitante dans $\mathbb{Z}$ est-elle une chaîne de Markov ? dans $\mathbb{Z}^2$?
2. Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de *v.a.i.i.d* de loi $\mathcal{B}(1/2)$ sur $\{-1,+1\}$. Par récurrence, on définit $X=(X_n)_{n\geq 0}$: $X_0=1$, $X_1=1$ et pour $n\geq 1$, $X_{n+1}=X_n+\varepsilon_n X_{n-1}$. On pose ensuite $Y=(Y_n)_{n\geq 0}=(X_{n+1},X_n)_{n\geq 0}$, $Z=(Z_n)_{n\geq 1}=(X_n,X_{n-1})_{n\geq 1}$. Les suites X,Y,Z sont-elles des chaînes de Markov ?

Exercice 2 : Être ou ne pas être (malin) ?

Un joueur retourne une à une les cartes d'un jeu de 52 cartes. Il peut, une et une seule fois au cours du jeu, dire "la prochaine est rouge" ; il gagne si la carte suivante est rouge, sinon il perd. On se demande quelles sont les stratégies de jeu qui optimisent la probabilité de victoire. On note A_n l'évènement "la $n-$ième carte retournée est rouge", R_n le nombre de cartes rouges encore dans le jeu après avoir retourné n cartes, et $\mathcal{F}_n := \sigma(R_0,\ldots,R_n)$.

1. Déterminer la loi de R_{n+1} sachant R_n. En déduire que $\mathbb{E}(R_{n+1}|\mathcal{F}_n)=R_n-\dfrac{R_n}{52-n}$.
2. Montrer que $X_n := \mathbb{P}(A_{n+1}|R_n)$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)$.
3. Soit $\tau\in\{0,\ldots,51\}$ le temps où le joueur dit "la prochaine est rouge". Montrer que τ est un temps d'arrêt et que la probabilité de victoire est $\mathbb{E}(X_\tau)$. Que peut-on conclure du théorème d'arrêt ?

Exercice 3 : Être ou ne pas être (homozygote) ?

Sur l'ensemble $E := \{0,\ldots,N\}$, on considère la chaine de Markov $(X_n^x)_{n\geq 0}$ issue de $x\in E$ de matrice de transition :

$$P_{i,j}=\binom{N}{j}\left(\frac{i}{N}\right)^j\left(1-\frac{i}{N}\right)^{N-j}.$$

Autrement dit, la loi de X_{n+1}^x sachant que $X_n^x=i$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(N,i/N)$.

1. Un état est dit *absorbant* si l'on y stationne avec probabilité un ; il est dit *transitoire* si avec probabilité positive la chaîne n'y revient plus ? Quels sont les états absorbants et transitoires de la chaîne $(X_n^x)_{n\geq 0}$?
2. Montrer que $\mathbb{P}_x-$presque sûrement, la suite $(X_n^x)_{n\geq 0}$ est une martingale relativement à sa filtration naturelle et que la limite $X_\infty^x=\lim_{n\to+\infty}X_n^x$ existe $\mathbb{P}_x-$presque sûrement. Préciser la loi de X_∞^x.