Partiel N. 1

Une attention particulière sera être portée à la rédaction. Tout devra être bien justifié.

$\boxed{1}$ Soient X et Y deux v.a. de carré intégrable. On suppose que $\mathbb{E}(X^2|Y) = Y^2$ et $\mathbb{E}(X|Y) = Y$. Montrer que $X = Y$ p.s.

$\boxed{2}$ On considère deux v.a. X, Y telles que $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(Y \geq k) = p^{k-1}$ pour tout $k \geq 1$ et

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X \geq t\}}|Y) = e^{-Yt} \text{ pour } t \geq 0.$$

[a] Montrer que X est une v.a. continue et calculer sa densité de probabilité f_X.

[b] Calculer $\mathbb{P}(Y = k|X \geq t)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$.

$\boxed{3}$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$, X et Y deux v.a.r. telles que X soit $\mathcal{B}$-mesurable et que les tribus $\mathcal{B}$ et $\sigma(Y)$ soient indépendantes. On suppose de plus que Y suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

[a] Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes.
- $\exp(X^2/2)$ est $\mathbb{P}$-intégrable
- $\exp(XY)$ est $\mathbb{P}$-intégrable
- $\exp(|XY|)$ est $\mathbb{P}$-intégrable

[b] On suppose que $\exp(X^2/2)$ est $\mathbb{P}$-intégrable.
- Sans calculer l'espérance conctionnelle, démontrer que

$$\mathbb{E}(\exp(XY)|\mathcal{B}) \geq 1 \ \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

- Dans le cas où $\mathcal{B} = \sigma(X)$, calculer $\mathbb{E}(\exp(XY)|\mathcal{B})$.
- Dans le cas où $\sigma(X) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{B}$, calculer $\mathbb{E}(\exp(XY)|\mathcal{B})$.

[c] On ne suppose plus que $\exp(X^2/2)$ est $\mathbb{P}$-intégrable. Calculer $\mathbb{E}(\exp(XY)|\mathcal{B})$.