Université Rennes 1
Master 1 Mathématiques année 2010-2011
Nathalie Krell



# Fiche de TD n°8 : Chaîne de Markov : mesures invariantes.

$\boxed{1}$ **Chaîne à deux états.** Soit $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov Homogène sur $E = \{0, 1\}$ de matrice de transition $P = ((P(i,j))_{(i,j)\in E^2}) = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$ `avec` $0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1$.

[a] Dessiner son graphe.

[b] Déterminer sa probabilité stationnaire $\Pi$.

[c] Calculer $\mathbb{P}_0(T_1 = n)$, $\mathbb{P}_0(T_0 = n)$.

[d] Calculer $P^n$ pour $n \geq 1$. Trouver $A > 0$ et $\rho \in ]0, 1[$ tels que pour tout $(x, y) \in E^2$, $|P^n(x, y) - \Pi(y)| \leq A\rho^n$.

$\boxed{2}$ **Chaîne d'Ehrenfest.** Soient $d$ balles ($d > 1$), numérotées de 1 à $d$ et réparties dans 2 urnes $A$ et $B$. On tire un nombre $i$ au hasard entre 1 et $d$, et la balle numéro $i$ est changée d'urne. Soit $X_n$ le nombre de balles dans l'urne $A$ après $n$ tirages successifs. La chaîne $(X_n, n \geq 0)$ est appelée chaîne d'Ehrenfest.

[a] On admet que $(X_n, n \geq 0)$ définit une chaîne de Markov. Vérifier qu'elle est homogène et déterminer sa matrice de transition.

[b] Si $X_0$ est distribué suivant une loi binomiale de paramètre $(d, 1/2)$, déterminer la distribution de $X_1$. Que peut-on en dire ?

[c] Dans cette question et la suivante, on suppose $d = 3$. Soit $T_0$ le nombre de tirage nécessaire pour vider $A$ (on tire au moins une fois, même si $A$ est vide au départ). Déterminer pour tout état $x$ et pour tout $n = 1, 2$ et 3, $\mathbb{P}_x(T_0 = n)$.

[d] Calculer $P$, $P^2$, $P^3$. Si $\mu_0 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ est la loi intiale de la chaîne déterminer les lois de $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ de $X_1$, $X_2$, $X_3$.

[e] Déterminer $\lim_{n\to\infty} P^n(x, y)$.
Application : $d = 4$, $X_0 = 0$.

[f] Pour cette question et la suivante, on considère la chaîne d'Ehrenfest modifiée. Lorsque la balle a été extraite d'une urne suivant la procédure décrite, on tire au sort (avec des probabilités égales) l'urne $A$ ou $B$ dans laquelle on la place.
Déterminer la matrice de transition, encore notée $P$, et la distribution stationnaire de la chaîne ainsi modifiée.

[g] Déterminer $\lim_{n\to\infty} P^n(x, y)$.
Application : $d = 4$, $X_0 = 0$.

$\boxed{3}$ **Chaîne de naissance et de mort.** On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'état $E = \mathbb{N}$ et de matrice de transition $P$ définie par

$$P(x, x-1) = q_x,\ P(x, x) = r_x,\ P(x, x+1) = p_x,$$

avec $p_x + q_x + r_x = 1$, $q_0 = 0$, $q_x > 0$ si $x > 0$, et $p_x > 0$. Une telle chaîne est appelée chaîne de naissance et de mort. Le but est d'étudier sous quelle condition cette chaîne est récurrente.
Pour $i \in E$, on pose $\tau_i = \inf\{n \geq 0 \,|\, X_n = i\}$. Etant donné trois états $a$, $x$, et $b$ tel que $a \leq x \leq b$, on pose $u(x) = \mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_b)$ et $\gamma(x) = \frac{q_1 \cdots q_x}{p_1 \cdots p_x}$ avec $\gamma(0) = 1$. (Observer que $\tau_i \neq T_i$.)

[a] Déterminer une relation entre $u(x+1)-u(x)$ et $u(x)-u(x-1)$ pour $a<x<b$. Calculer en fonction des $\gamma(y)$ pour $a \leq y < b$ la valeur de $u(a)-u(a+1)$ et en déduire que

$$u(x) = \frac{\sum_{y=x}^{b-1} \gamma(y)}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma(y)}$$

pour $a \leq x \leq b$. Traiter le cas particulier où $p_x = q_x$ pour tout $x > 0$.

[b] Déterminer $\mathbb{P}_1(T_0 = +\infty)$ et montrer que la chaîne est récurrente si et seulement si $\sum_{y=0}^{\infty} \gamma(y) = +\infty$.

[c] Déterminer les mesures $\lambda$ sur $E$ invariantes par la matrice $P$ et en déduire que la chaîne est récurrente positive si et seulement si

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{p_0 \dots p_{x-1}}{q_1 \dots q_x} < \infty.$$

$\boxed{4}$ Soit $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov homogène sur $E = \{0,1,2,3,4,5\}$ de matrice de transition

$$P = ((P(i,j))_{(i,j)\in E^2}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

[a] Calculer $U(0,0)$, que peut-on en déduire ?

[b] Effectuer la classification des états : déterminer les classes de récurrence et les états transitoires. Pour tous les états récurrents $x$, il faut démontrer de deux manières différentes qu'ils sont récurrents (dont une en calculant explicitement $\rho_{xx}$.)
Dessiner son graphe.

[c] Calculer les probabilités d'absorption dans les classes de récurrence.

[d] Calculer les mesures invariantes.