Université Rennes 1
Master 1 Mathématiques année 2010-2011
Nathalie Krell

Fiche de TD n°7 : Chaîne de Markov : classification des états.

$\boxed{1}$ Questions "simples" sur la classification des états

[a] Donner un exemple où l'ensemble des points visités par la chaîne issue de x n'est pas déterministe, i.e. constant p.s. (pour éviter la question de la mesurablilité d'une application à valeurs dans $\mathcal{P}(S)$ lorsque S est infini, on prendra S fini ou alors, avec S infini, on exhibera deux événements de mesure > 0 sur lesquels les ensembles des points visités ne sont pas les mêmes).

[b] Donner un exemple où, sans que x soit récurrent, sous $\mathbb{P}_x$, l'ensemble des points visités par la chaîne est p.s. toujours le même. Donner un exemple où, de plus, l'ordre des 3 premiers points visités en partant de x n'est pas déterministe.

[c] Pour $x, y \in S$, a-t-on : y récurrent et $U(x, y) > 0 \Rightarrow N_y = \infty\ \mathbb{P}_x - p.s.$?

[d] Donner un exemple où $U(x, y) > 0$ mais $U(y, x) = 0$.

[e] On sait que pour tous $x, y \in S$, $U(x, y) = \infty \Rightarrow y$ récurrent (pourquoi ?). La réciproque est-elle vraie ?

[f] Peut-on avoir $0 < U(x, y) < \infty$, avec y récurrent ?

[g] Montrer que si $U(x, y) = \infty$, alors $U(y, x) = 0$ ou ∞.

[h] On suppose que pour tout $x \in S$, l'ensemble $V_x = \{y \in S | U(x, y) > 0\}$ est fini. Montrer qu'il existe des états récurrents.

$\boxed{2}$ Pour chacune des matrices P suivantes, déterminer les états transitoires et les classes de récurrence.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ On considère la matrice de Markov suivante : l'espace d'état est $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et les $* > 0$. Trouver les états absorbants, transitoires et les classes de récurrence. Réindexer l'ensemble des états de façon à faire apparaître clairement les classes.

$$P = ((P(i, j))_{(i,j)\in E^2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ **Probabilités d'absorption.** On considère $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P et d'espace d'états E ; soit E_T le sous ensemble des états transitoires, supposé fini et non vide ; C un sous-ensemble clos irréductible d'états récurrents.

[a] Montrer que $\forall x \in E\ \forall y \in E_T,\ P^n(x,y) \underset{n}{\rightarrow} 0$. En déduire que si E est fini, la chaîne a au moins un état récurrent.

[b] Soit désormais $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. Compléter la matrice P pour qu'elle soit une matrice de transition : $P = \begin{pmatrix} * & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & * & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & * \end{pmatrix}$. Déterminer :

- les états transitoires et récurrents,
- les probabilités d'absorption dans les sous-ensemble clos irréductibes.
- (*) Montrer que la chaîne admet une infinité de probabilités stationnaires que l'on calculera.
- (*) Que vaut la fréquence-limite du nombre de passages dans l'état 1 ?

$\boxed{5}$ Soit $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov homogène sur $E = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ de matrice de transition

$$P = ((P(i,j))_{(i,j)\in E^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

[a] Effectuer la classification des états : déterminer les classes de récurrence et les états transitoires. Dessiner son graphe.

[b] Calculer les probabilités d'absorption dans les classes de récurrence.

[c] Calculer les mesures invariantes.