Université Rennes 1
Master 1 Mathématiques année 2010-2011
Nathalie Krell

Fiche de TD n°6 : Chaîne de Markov : propriétés de Markov.

$\boxed{1}$ **Etude de ρ_{xy}.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'état E et de matrice de transition P. Soient deux états distincts x et y tels que $\rho_{xy} = \mathbb{P}_x(T_y < \infty) > 0$.

[a] Montrer que $\rho_{xy} > 0$ ssi il existe $n \geq 1$ tel que $P^n(x, y) > 0$.

[b] Soit n_0 le plus petit entier supérieur ou égal à 1 tel que $P^{n_0}(x, y) > 0$, et soient x_1,..., x_{n_0-1} des états tels que $P(x, x_1)P(x_1, x_2)...P(x_{n_0-1}, y) > 0$. Montrer que les états $x, x_1, ..., X_{n_0-1}, y$ sont distincts.

[c] Lorsque E est fini, avec d éléments, montrer que $n_0 \leq d - 1$ et que $\mathbb{P}_x(T_y \leq d - 1) > 0$.

$\boxed{2}$ **Exemple d'application de la propriété de Markov faible.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'état E et de matrice de transition P. Montrer les relations suivantes :

[a] $P^n(x, y) = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_x(T_y = m)P^{n-m}(y, y)$ pour $n \geq 1$.

[b] Si a est un état absorbant, $\mathbb{P}_x(X_n = a) = \mathbb{P}_x(T_a \leq n)$ pour $n \geq 1$.

[c] $\mathbb{P}_x(T_y = n + 1) = \sum_{z\neq y} P(x, z)\mathbb{P}_z(T_y = n)$ pour $n \geq 1$.

[d] $\rho_{xy} = P(x, y) + \sum_{z\neq y} P(x, z)\rho_{zy}$.

$\boxed{3}$ Propriété de Markov simple Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace dénombrable S, de fonction de transition Q, issue de x sous $\mathbb{P}_x$. Soit F un sous-ensemble non vide de S. On pose $T_F = T_F(X_0, X_1, ...) = \inf\{n \geq 0 : X_n \in F\}$.

[a] Montrer que pour toute fonction h positive bornée définie sur F, la fonction g définie par

$$\forall x \in S \;\; g(x) = \mathbb{E}_x(h(X_{T_F})\mathbb{1}_{\{T_F<\infty\}})$$

est solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} g(x) &= Qg(x), \forall x \in F^c \\ g(x) &= h(x), \forall x \in F. \end{aligned}$$

On va montrer que g est la solution positive minimale de ce problème.

[b] Soit f une autre solution positive de ce problème. Montrer que pour tout $n \geq 0$

$$f(x) = \mathbb{E}_x(f(X_{n\wedge T_F})).$$

[c] En déduire que $f \geq g$.

$\boxed{4}$ Marche aléatoire symétrique Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$. On pose, pour tout n, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$.

[a] Montrer, pour $a \in \mathbb{N}$, que $T_a = T_a(S_0, S_1, ...) = \inf\{n \in \mathbb{N} | S_n = a\}$ est fini p.s. (on pourra considérer $a - S_{n\wedge T_a}$).

[b] Montrer que $(T_{a+1} - T_a)_{a\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a. i.i.d.