Université Rennes 1
Master 1 Mathématiques année 2010-2011
Nathalie Krell

Fiche de TD n°4 : Martingales suite.

1 Loi du logarithme itéré.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit $S_n = X_1 + ... + X_n$. Le but de l'exercice est de montrer que *p.s.* on a

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{(2n \ \log \ \log \ n)^{\frac{1}{2}}} \leq 1.$$

On pose $h(x) = (2x \ \log \ \log \ x)^{\frac{1}{2}}$ pour $x > e$.

[a] Montrer que pour tous $\theta > 0$ et $c > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq c) \leq e^{-\theta c}\mathbb{E}(e^{\theta S_n})$$

En déduire que :

$$\mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq c) \leq e^{-\frac{c^2}{2n}}$$

[b] Soit $K > 1$. Majorer la quantité

$$\mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq K^n} S_k \geq Kh(K^{n-1}))$$

et montrer que $\limsup_{n\to\infty} h(n)^{-1} S_n \leq K, p.s.$ Conclure.

2 Théorème de Radon-Nikodym.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On suppose que $\mathcal{A}$ est engendrée par une suite d'événements $(A_1, A_2, ...)$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $\mathcal{B}_n = \sigma(A_1, ..., A_n)$. Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et $\mathbb{Q}$ une mesure positive bornée sur le même espace absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \ \mathbb{P}(A) = 0 \ \Rightarrow \ \mathbb{Q}(A) = 0.$$

[a] Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{A}, \ \ \mathbb{P}(A) < \eta \Rightarrow \mathbb{Q}(A) < \epsilon.$$

[b] Montrer qu'il existe une partition finie $(A_{n,i})_{1\leq i\leq m_n}$ de Ω engendrant la tribu $\mathcal{B}_n$. On pose

$$X_n = \sum_{i=1}^{m_n} \frac{\mathbb{Q}(A_{n,i})}{\mathbb{P}(A_{n,i})} \mathbb{1}_{\{A_{n,i}\}},$$

où l'on donne la valeur 0 aux rapports de la forme 0/0.

[c] Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 1}$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est équiintégrable. Indication : on pourra utiliser la question précédente et montrer que pour $a > 0$ $\mathbb{Q}(X_n > a) = \int_{X_n > a} X_n d\mathbb{P}$.

[d] Montrer qu'il existe une v.a.r. X $\mathbb{P}$-intégrable telle que $\mathbb{Q}(A) = \int_A X d\mathbb{P}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. On note $X = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, X est la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$.