Université Rennes 1
Master 1 Mathématiques année 2010-2011
Nathalie Krell

Martingales et Chaînes de Markov

Fiche de TD n°2 :

$\boxed{1}$ Soient X et Y deux v.a. définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, X à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, Y à valeurs dans $\mathbb{R}^q$. Montrer que Y est X-mesurable, c'est à dire Y est mesurable par rapport à $\sigma(X)$ si et seulement s'il existe une fonction borélienne $f : \mathbb{R}^p \to I\!R^q$ telle que $Y = f(X)$. Indictation : on pourra commencer en supposant Y étagée.

$\boxed{2}$ Soient $X_1, ..., X_n$ des v.a.r. indépendantes de densité $f(x)$. On pose $X = max(X_1, ...X_n)$ et $Y = min(X_1, ..., X_n)$.

[a] Déterminer la loi conditionnnelle de Y sachant $X = x$ et $\mathbb{E}(Y|X)$.

[b] Application : les X_i sont des v.a. uniformes sur $[0, 1]$. Donnes les résultats de la question précédente et les interpréter.

$\boxed{3}$ Soit (X, Y) un vecteur gaussien non dégéné.

[a] On veut montrer que $\mathbb{E}(Y|X)$ est de la forme $a + bX$ et calculer les constantes a et b.
- Résoudre la question en utilisant le fait que pour tout couple (a, b) de réels, le vecteur $(X, Y - (a + bX))$ est gaussien.
- Résoudre la question en raisonnant sur la densité du couple (X, Y).
  On pourra d'abord supposer que (X, Y) est centrée, réduit, de covariance ρ.

[b] Déterminer $\mathbb{E}(Y|X + Y)$ et retrouver géométriquement le résultat si (X, Y) est centré réduit.