Université Rennes 1
Master 1 Mathématiques année 2010-2011
Nathalie Krell

Martingales et Chaînes de Markov

# Fiche de TD n°1 :

$\boxed{1}$ On jette simultanément deux dés. On note $X$ le nombre de chiffres pairs apparus et $Y$ le maximum des deux chiffres obtenus. Chercher la loi du couple $(X, Y)$. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

$\boxed{2}$ La loi d'un couple de variables aléatoires est donnée par le tableau suivant :

| $X\backslash Y$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1/6 | 1/12 | 1/12 |
| 1 | 0 | 1/12 | 1/24 | 1/24 | 0 |
| 2 | 1/4 | 1/8 | 1/8 | 0 | 0 |

[a] Déterminer la loi de $X$, puis celle de $Y$.

[b] Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[XY]$ et $Cov(X, Y)$.
Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

[c] On pose $U = X$ et $Z = X + Y$. Donner le tableau de la loi du couple $(U, Z)$.
Les variables $U$ et $Z$ sont-elles indépendantes ?

$\boxed{3}$ L'ADN est soumis à des mutations endogènes et exogènes. Pour survivre, les cellules disposent d'un mécanisme de réparation, mais parfois la mutation se fixe et se transmet aux cellules filles. On suppose que le nombre de mutation $M$ subi par l'ADN suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ et on note $p$ la probabilité qu'une mutation soit fixée, cette dernière est indépendante de $M$.

[a] Quelle est la loi du nombre de mutation fixée $F$ sachant que $M = k$ ?

[b] Déterminer la loi du couple $(M, F)$.

[c] Déterminer la loi de $F$, son espérance et sa variance.

[d] Quelle est la loi de $M$ sachant que $F = n$ ?

$\boxed{4}$

[a] Soient $X_1$ et $X_2$ deux v.a. indépendantes, de lois binomiales de paramètres respectifs $(n_1, p)$ et $(n_2, p)$.
– Détermier la loi de $X_1$ sachant $X_1 + X_2 = n$.
– Déterminer $\mathbb{E}(X_1|X_1 + X_2)$.

[b] On suppose que $X_1, ..., X_p$ sont $p$ v.a. de Poisson indépendantes de paramètres $\lambda_1, ..., \lambda_p$.
– Détermier la loi de $X_1, ...X_{p-1}$ sachant $X_1 + X_2 + .. + X_p = n$.
– Déterminer $\mathbb{E}(X_1|X_1 + X_2)$.

$\boxed{5}$ On suppose que la densité jointe de $X$ et $Y$ est donné par

$$f(x, y) = \begin{cases} 6xy(2 - x - y) & 0 < x < 1 \text{ ,} 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $\mathbb{E}(X|Y = y)$ pour $0 < y < 1$.

$\boxed{6}$ On suppose que $X$ et $Y$ soient deux v.a.r. indépendantes de densité $f_X$ et $f_Y$, respectivement. Déterminer $\mathbb{P}(X < Y)$.

$\boxed{7}$ Une assurance de compagnie suppose que le nombre d'accident au cours d'une année de chacun de ses clients suit une loi de Poisson, avec une moyenne d'accident au cours de l'année qui dépend du client. Si la moyenne de la loi de Poisson de chaque client suit une loi Gamma de fonction de densité

$$g(x) = xe^{-x}, \ \ x \geq 0$$

quelle est la probabilité qu'un client choisit aléatoirement ait exactement $n$ accidents l'année prochaine ?

$\boxed{8}$ Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité, $X$ une v.a.r. qui prend p.s. ses valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_1, ..., x_n, ...\}$ avec $\mathbb{P}(X = x_i) \neq 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et $Y$ une v.a.r. telle que $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$. Déterminer $E(Y|X)$.

$\boxed{9}$ Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité telles que $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ et $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$. Soit $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. On définit

$$Var^{\mathcal{G}}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}))^2|\mathcal{G})$$

et

$$Cov^{\mathcal{G}}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}))(Y - \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}))|\mathcal{G}).$$

Montrer que

$$Var(X) = \mathbb{E}(Var^{\mathcal{G}}(X)) + Var(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))$$

et que

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(Cov^{\mathcal{G}}(X, Y)) + Cov(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}), \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})).$$

$\boxed{10}$

[a] Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. Montrer que $X$ et $Y$ sont indépendantes si et seulement si pour toute application $g : I\!\!R \to I\!\!R$ borélienne bornée on a :

$$\mathbb{E}(g(Y)|X) = \mathbb{E}(g(Y)) \ \ \mathbb{P} - p.s.$$

[b] Application : Soit $(X, Y)$ un couple aléatoire admettant pour densité $p(x, y) = e^{-y}\mathbb{1}_{\{0<x<y\}}$. Calculer la loi conditionnelle de $Y$ sachant $X = x$. En déduire que $X$ et $X - Y$ sont indépendantes.

$\boxed{11}$ Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité, $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ et $X$ une variable aléatoire positive sur $\Omega$. Montrer que $\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) > 0\}$ est le plus petit ensemble $\mathcal{G}$-mesurable (aux ensembles négligeables près) qui contient $\{X > 0\}$.

$\boxed{12}$ Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda$. On note $T = X_1 + ... + X_n$. Calculer $\mathbb{E}(h(X_1)|T)$ pour toute fonction $h$ borélienne positive. Que remarque-t-on lorsque $n = 2$ ?