UNIVERSITÉ RENNES 1 Master 1

19 Mars 2012

CMMA dernier TP

Exercice 1. *Marche aléatoire à boucles effacées*

On rappelle l'algorithme qui à partir d'une réalisation de la marche aléatoire simple $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ en dimension deux, fournit son analogue à boucles effacées :

$$\begin{cases} \text{on initialise } i_0 = \max\{i,\ S_i = S_0\}, \\ \text{puis tant que } S_{i_j} \neq S_n, \text{ on pose} \\ \qquad i_{j+1} = \max\{i, S_i = S_{i_j}\} + 1, \\ \text{enfin, on pose } J = \min\{j, S_{i_j} = S_n\}. \end{cases}$$

La marche à boucles effacées est alors donnée par $LE(S) := (S_{i_0}, S_{i_0}, \ldots, S_{i_J})$.

1. Écrire une fonction `marche2(n)` qui étant donné l'entier n renvoie les coordonnées d'une marche aléatoire symétrique en dimension deux, issue de zéro et de longueur n.
2. Écrire une procédure qui, à partir d'une réalisation de la fonction `marche2`, renvoie lez coordonnées de la marche à boucles effacées correspondante.
3. Représenter sur une même figure une réalisation de la marche aléatoire simple et de sa version à boucles effacées.
4. Que peut-on dire de la longueur de la trajectoire à boucles effacées comparée à celle de la trajectoire initiale ?
5. À partir des procédures introduites dans l'exercice deux, tracer une trajectoire de la marche aléatoire à boucles effacées (on note N la longueur de la trajectoire) ainsi que les cercles de rayon $\sqrt{N}$ et $N^{4/5}$ centrés en l'origine. Quel est le cercle qui semble le mieux approcher la distance typique entre l'origine et la fin de la marche ?

   On montre que pour une marche à boucles effacées, la distance typique est bien de l'ordre de $N^{4/5}$, contrairement au cas d'une marche simple où elle est de l'ordre $\sqrt{N}$. La limite d'échelle de la marche à boucles effacées n'est pas le mouvement brownien mais un autre processus appelée SLE (pour Schramm-Loewner-Evolution) d'indice 2.