Correction du deuxième partiel

Exercice 1 :

1. La chaîne est caractérisée par la mesure initiale $\nu = \delta_1$ et la matrice de transition
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit N le nombre de sauts nécessaires pour arriver à 5. La variable N est à valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ et l'on a
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N=1) &= \mathbb{P}(X_1 = 1,\ X_2 = 5) = \tfrac{1}{4} = \tfrac{6}{24}, \\
\mathbb{P}(N=2) &= \mathbb{P}(1 \to 2 \to 5) + \mathbb{P}(1 \to 3 \to 5) + \mathbb{P}(1 \to 4 \to 5) \\
&= \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \times 1 = \tfrac{11}{24}, \\
\mathbb{P}(N=3) &= \mathbb{P}(1 \to 2 \to 3 \to 5) + \mathbb{P}(1 \to 3 \to 3 \to 5) + \mathbb{P}(1 \to 2 \to 4 \to 5) \\
&= \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{2} \times 1 + \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{3} \times 1 = \tfrac{6}{24}, \\
\mathbb{P}(N=4) &\quad \mathbb{P}(1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5) \\
&= \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2} \times 1 = \tfrac{1}{24},
\end{aligned}$$
de sorte que $\mathbb{E}[N] = 1 \times \dfrac{6}{24} + 2 \times \dfrac{11}{24} + 3 \times \dfrac{6}{24} + 4 \times \dfrac{1}{24} = \dfrac{50}{24} = \dfrac{25}{12}$.

3. On désigne par N_{n-k}^n le nombre de sauts nécessaires pour aller de $n-k$ à n, ainsi $b_k = \mathbb{E}[N_{n-k}^n]$. Selon le premier saut, on a
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_{n-k}^n] &= \mathbb{E}[N_{n-k}^n 1_{X_1 = n}] + \mathbb{E}[N_{n-k}^n 1_{X_1 \neq n}] \\
&= 1 + \textstyle\sum_{j=n-k+1}^{n-1} \mathbb{E}[N_{n-k}^n | X_1 = j] \times \mathbb{P}(X_1 = j).
\end{aligned}$$
Or par la propriété de Markov, on a $\mathbb{E}[N_{n-k}^n | X_1 = j] = \mathbb{E}[N_j^n] = b_{n-j}$. D'autre part, comme les sauts sont de loi uniforme $\mathbb{P}(X_1 = j) = 1/k$ d'où l'égalité :
$$b_k = 1 + \frac{1}{k}\,(b_1 + \ldots + b_{k-1})$$

4. Question facultative : on peut raisonner par récurrence sur k.

Exercice 2 :

1. Les suites S_n et P_n peuvent s'écrire sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} S_{n+1} = f(S_n, X_{n+1}) \\ \\ P_{n+1} = g(P_n, X_{n+1}) \end{array}\right. \quad \text{avec } \; X_{n+1} \perp \left\{\begin{array}{l} \sigma(S_0, \dots S_n) \\ \\ \sigma(P_0, \dots P_n) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} f(x,y) = x + y \\ \\ g(x,y) = x \times y \end{array}\right.$$

d'après le cours, ce sont bien des chaînes de Markov. La chaîne S_n est strictement croissante donc tous ses états sont visités au plus une fois et elle est transiente. De même, si Q désigne la matrice de transtion de P_n, on a pour tout entier x :

$$U(x,x) = \sum_n Q^n(x,x) = \sum_n \frac{1}{6^n} < +\infty,$$

donc la chaîne P_n est elle aussi transiente.

2. La chaîne induite U_n prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 5\}$. Sa matrice de transition est

$$P := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \text{qui vérifie } \; P^n = P, \;\; \forall\, n \geq 1.$$

3. La matrice de transition Q de la chaîne Z est donnée par

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

L'état 0 est absorbant et les états 1 et 2 sont transitoires.

4. L'état 0 étant absorbant et l'état 1 étant transitoire, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n = 1) = 0$. Cela peut aussi se voir sur la puissance $n-$ième de la matrice Q.

5. La chaîne $(Y_n)_{n\geq 0}$ est irréductible : on peut aller de tout état à un autre avec probabilité strictement positive. En effet, pour la chaîne S, on a

$$\mathbb{P}_0(0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \dots \to 12 \to 13) = \frac{1}{6^{13}} > 0$$

donc pour la chaîne Y : $\mathbb{P}_0(0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \dots \to 12 \to 0) = 6^{-13} > 0$. En parcourant ce cycle, on peut aller de n'importe quel état à un autre.

6. Dans le cas général, d'après la propriété de Markov, D_k^0 ne dépend pas de k et si R désigne la matrice de transition de Y, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_1^0 = m) \quad &= \mathbb{P}_0(Y_1 = 0, \dots Y_{m-1} = 0, Y_m \neq 0) \\ &= R_{00}^{m-1}(1 - R_{00}) \end{aligned}.$$

La loi de D_1^0 est la loi géométrique de paramétre $1 - R_{00}$. Ici, on ne peut rester en zéro *i.e.* $R_{00} = 0$ et on a donc $D_0^k = 1$ presque sûrement.