Université Rennes 1 — Master 1 Mathématique
Martingales et chaînes de Markov — année 2010-2011

Correction du deuxième partiel

Exercice 1 : Être ou ne pas être (markovien) ?

1. La marche aléatoire auto-évitante dans $\mathbb{Z}^2$ n'est clairement pas une chaîne de Markov. On a par exemple :

$$0 = \mathbb{P}(X_2 = (0,0)|X_1 = (0,1), X_0 = (0,0)) \neq \mathbb{P}(X_2 = (0,0)|X_1 = (0,1)) > 0.$$

Le cas unidimensionnel est plus piègeux. Une fois le premier pas effectué, la marche devient déterministe, aussi a-t-on envie de dire que la chaîne est markovienne. Ce n'est pourtant pas le cas, puisque l'on doit se souvenir du sens du premier pas :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, X_0 = x_0),$$

mais

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) \neq \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n).$$

2. La suite $X = (X_n)_{n\geq 0}$ n'est pas markovienne. En effet, si on tire $\varepsilon_1 = -1$ et $\varepsilon_2 = 1$, on a $X_2 = X_1 - X_0 = 0$, $X_3 = X_2 + X_1 = 1$ d'où

$$\mathbb{P}(X_4 = 1|X_3 = 1, X_2 = 0) = 1.$$

En revanche, si $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = -1$, alors $X_2 = X_1 + X_0 = 2$, $X_3 = X_2 - X_1 = 1$ et

$$\mathbb{P}(X_4 = 1|X_3 = 1, X_2 = 2) = 0.$$

On a exhibé un cas où X_4 ne dépend pas uniquement de X_3 mais aussi de X_2, d'où le résultat.
Cas des suites (Y_n) et (Z_n) : on remarque que les suite (Y_n) et (Z_n) ont même nature puisqu'elles s'obtiennent l'une de l'autre par décalage. Ces deux suites sont bien des chaînes de Markov. En effet, on a

$$Z_{n+1} = (X_{n+1}, X_n) = (X_n + \varepsilon_n X_{n-1}, X_n) = f(Z_n, \varepsilon_n),$$

où la fonction f est donnée par $f((x,y),z) = (x + zy, x)$ et la suite ε_n est *i.i.d.* On conclut comme dans l'exercice 5 du TD 5.

Exercice 2 : Être ou ne pas être (malin) ?

1. On remarque tout d'abord qu'après avoir retourné n cartes, le jeu en contient encore $52-n$, et si $R_n = j$, alors le jeu contient j cartes rouges. On a donc

$$\mathbb{P}(A_{n+1}|R_n = j) = \frac{j}{52-n}, \quad \text{pour} \quad j \in \{0, \ldots, 26\}.$$

La loi conditionnelle de R_{n+1} sachant R_n est concentrée sur l'ensemble $\{R_n, R_n - 1\}$ et l'on a

$$\mathbb{P}(R_{n+1} = R_n - 1|R_n) = \mathbb{P}(A_{n+1}|R_n) = \frac{R_n}{52-n},$$

et naturellement

$$\mathbb{P}(R_{n+1} = R_n|R_n) = \mathbb{P}(A_{n+1}^c|R_n) = \frac{52-n-R_n}{52-n}, \quad \text{pour} \quad n \in \{0, \ldots, 50\}.$$

Par ailleurs $\mathbb{P}(R_{n+1} = j|R_n) = \mathbb{P}(R_{n+1} = j|\mathcal{F}_n)$, car la connaissance de $(R_0, \ldots, R_{n-1})$ n'ajoute aucune information supplémentaire sur R_{n+1}, si on connaît R_n. On a donc $\mathbb{E}(R_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(R_{n+1}|R_n)$ avec

$$\mathbb{E}(R_{n+1}|R_n) = R_n - \frac{R_n}{52-n}.$$

2. La suite $X_n := \mathbb{P}(A_{n+1}|R_n)$ est bornée donc intégrable, elle est bien sûr adaptée à $\mathcal{F}_n$ et l'on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \frac{1}{52-n-1}\mathbb{E}(R_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\ &= \frac{1}{52-n-1} \times \left(R_n - \frac{R_n}{52-n}\right) = X_n. \end{aligned}$$

3. Le joueur peut décider de dire la phrase fatidique seulement sur la base des cartes déjà retournées, c'est-à-dire que $\{\tau = n\}$ est inclus dans $\sigma(R_0, \ldots, R_n) = \mathcal{F}_n$ et τ est donc un temps d'arrêt. Toute stratégie correspond à choisir un tel temps d'arrêt. La probabilité de victoire est

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{\tau+1}) &= \sum_{n=0}^{51} \mathbb{P}(\{\tau = n\} \cap A_{n+1}) = \sum_{n=0}^{51} \mathbb{E}(1_{\{\tau=n\}}\mathbb{P}(A_{n+1}|\mathcal{F}_n)) \\ &= \sum_{n=0}^{51} \mathbb{E}(1_{\{\tau=n\}}X_n) = \mathbb{E}(X_\tau). \end{aligned}$$

Par le théorème d'arrêt, puisque (X_n) est une martingale et τ est un temps d'arrêt borné ($\tau \leq 51$ *p.s.*), on a $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0) = 1/2$. On conclut que toutes les stratégies se valent et que la probabilité de victoire dans ce jeu est toujours égale à $1/2$.

Exercice 3 : Être ou ne pas être (homozygote)

1. Les états 0 et N sont les seuls états absorbants, en effet on a

$$P_{i,i} = 1 \Longleftrightarrow \binom{N}{i} \left(\frac{i}{N}\right)^i \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-i} = 1 \Longleftrightarrow i \in \{0, N\}.$$

Les autres états sont transitoires, en effet si $i \in \{1, \dots, N-1\}$ on a

$$\mathbb{P}(\forall n \geq 1,\, X_n \neq i \,|\, X_0 = i) > \mathbb{P}(X_1 = 0 | X_0 = i) = P_{i,0} > 0.$$

2. La suite $(X_n^x)_{n\geq 0}$ est bornée donc intégrable, elle est bien entendu adaptée à sa filtration naturelle. Conditionnellement à X_n^x, X_{n+1}^x suit un loi binomiale $\mathcal{B}(N, X_n^x/N)$ donc $\mathbb{E}(X_{n+1}^x | X_n^x) = \mathbb{E}(\mathcal{B}(N, X_n^x/N)|X_n^x) = X_n^x$. La suite (X_n^x) est donc une martingale bornée et elle converge presque sûrement vers une variable X_∞^x à valeurs dans l'ensemble des états absorbants $\{0, N\}$. On a de plus $\mathbb{E}(X_\infty^x) = \mathbb{E}(X_0^x) = x$ c'est-à-dire

$$0 \times \mathbb{P}(X_\infty^x = 0) + N \times \mathbb{P}(X_\infty^x = N) = x,$$

et on en déduit la loi de X_∞^x :

$$\mathbb{P}(X_\infty^x = 0) = 1 - \frac{x}{N}, \qquad \mathbb{P}(X_\infty^x = N) = \frac{x}{N}.$$