Correction du devoir en temps libre

à rendre pour le 17.02.2011

Exercice 1 : *face à face au casino*

L'équation (1) s'écrit encore, pour toute fonction borélienne bornée $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) = X_n f\left(\frac{1+X_n}{2}\right) + (1-X_n) f\left(\frac{X_n}{2}\right). \tag{2}$$

1. Si on pose $f(x) = x$ dans (2), on obtient :

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n \times \left(\frac{1+X_n}{2}\right) + (1-X_n) \times \left(\frac{X_n}{2}\right) = X_n.$$

2. Par définition, $X_n \in [0,1]$ presque sûrement pour tout n, donc (X_n) est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^2$ et, par le théorème de convergence des martingales, X_n converge *p.s.* et dans $\mathbb{L}^2$ vers une variable $Z \in [0,1]$.
3. Si on pose $f(x) = x^2$ dans (2) et on prend l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}[X_{n+1}^2] = \mathbb{E}\left[X_n \times \frac{(1+X_n)^2}{4} + (1-X_n) \times \frac{X_n^2}{4}\right] = \frac{\mathbb{E}[X_n + 3X_n^2]}{4}.$$

   Quand n tend vers l'infini, par convergence dominée on trouve :

$$\mathbb{E}[Z^2] = \frac{\mathbb{E}[Z + 3Z^2]}{4}, \quad i.e.\ \mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X_0] = p.$$

4. Pour une telle variable W, on a $W(1-W) \geq 0$ et $\mathbb{E}(W(1-W)) = 0$, on en déduit que $W(1-W) = 0$ presque sûrement et donc $W \in \{0,1\}$ presque sûrement, *i.e.* W est une variable de Bernoulli de paramètre $\mathbb{E}[Z]$. Or on a vu que $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(Z)$, c'est-à-dire $\mathbb{E}(Z(1-Z)) = 0$. Puisque $Z \in [0,1]$ comme limite de $X_n \in [0,1]$, on conclut que Z est une variable de Bernoulli de paramètre $\mathbb{E}(Z) = p$.

   Il faut remarquer que l'hypothèse $W \in [0,1]$ est importante : si Y est une variable exponentielle de paramètre 1 ou une variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors $\mathbb{E}(Y(1-Y)) = 0$ mais Y n'est pas de Bernoulli !

5. D'après l'équation (2) , on a :

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2}\Big|\mathcal{F}_n\right) = X_n, \quad \mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2}\Big|\mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n,$$

et la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $\mathcal{F}_n$ est donnée par

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in dt|\mathcal{F}_n) = X_n \delta_{\frac{1+X_n}{2}}(dt) + (1 - X_n)\delta_{\frac{X_n}{2}}(dt).$$

On en déduit que la loi conditionnelle de Y_n sachant $\mathcal{F}_n$ est la loi d'une variable de Bernoulli de paramètre X_n. Donc

$$\mathbb{P}(Y_n = 0) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(Y_n = 0|\mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(1 - X_n) = 1 - p,$$

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(Y_n = 1|\mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(X_n) = p,$$

et Y_n est une variable de Bernoulli de paramètre p.

6. Puisque X_n tend vers Z presque sûrement, $Y_n = 2X_{n+1} - X_n$ converge vers $2Z - Z = Z$ presque sûrement. Or, Y_n prend seulement les valeurs 0 et 1 *p.s.*. Donc *p.s.* il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ aléatoire tel que $Y_n = Z$ pour $n \geq n_0$. Donc $\liminf_n G_n = \{Z = 1\}$ et $\liminf_n H_n = \{Z = 0\}$. On peut voir que les variables (Y_n) ne sont pas indépendantes de plusieurs façons. Par exemple, si c'était le cas, puisque $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \sum_n p = +\infty$, alors par le deuxième lemme de Borel-Cantelli on aurait $\mathbb{P}(\limsup_n \{Y_n = 1\}) = 1$; mais Y_n converge *p.s.* et donc $\lim_n Y_n = 1$ presque sûrement ce qui contredit le résultat du point 4. On peut aussi remarquer que la limite Z n'est pas une variable constante *p.s.* (loi du zéro-un). On peut aussi calculer explicitement :

$$\mathbb{P}(Y_0 = 1, Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_0 = 1)\mathbb{P}(Y_1 = 1|Y_0 = 1) = p \times \frac{1+p}{2}$$

qui est différent de $\mathbb{P}(Y_0 = 1)\mathbb{P}(Y_1 = 1) = p^2$.

7. La variable Y_n est presque sûrement l'indicatrice de l'évènement "le joueur gagne la $(n + 1)-$ième partie". À chaque partie le joueur a une probabilité p de gagner et $1 - p$ de perdre. Presque sûrement, après un certain nombre de parties, la situation se stabilisera : soit le joueur gagnera toutes les parties successives, soit il les perdra toutes. Si le jeu continue indéfiniment, à la limite le joueur gagnera le capital entier ou il perdra tout ; le premier évèenement a probabilité p et le second $1 - p$.

Problème :

1. Comme dans le cas classique, on s'intéresse au nombre de montées de $X_{-n}, \ldots, X_0$ entre a et b que l'on note $N_n([a,b],X)$. On désigne par $N([a,b],X)$ sa limite croissante lorsque n tend vers l'infini. On a $(b-a)\mathbb{E}[N_n([a,b],X) \leq \mathbb{E}[(X_0-a)^+]$ de sorte que $\mathbb{E}[N([a,b],X)] < +\infty$. Ceci étant vrai pour tout couple de rationnels (a,b), on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{(a,b)\in\mathbb{Q}^2} \{\liminf_n X_n < a < b < \limsup_n X_n\}\right) = 0,$$
et donc $\liminf_n X_n = \limsup_n X_n$ presque sûrement, autrement dit la suite (X_n) converge presque sûrement. Comme $X_n = \mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_n]$, la famille (X_n) est uniformément intégrable, et la convergence a lieu également dans $\mathbb{L}^1$.
2. On identifie à présent la limite $X_{-\infty} := \lim_{n\to-\infty} X_n$. On a clairement $X_{-\infty} \in \mathcal{F}_{-\infty}$. Si $A \in \mathcal{F}_{-\infty}$, comme $X_n = \mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_n]$, on a $\mathbb{E}[X_n 1_A] = \mathbb{E}[X_0 1_A]$. Par ailleurs, lorsque n tend vers moins l'infini, $X_n 1_A$ converge vers $X_{-\infty}1_A$ dans $\mathbb{L}^1$. On en déduit que, pour tout $A \in \mathcal{F}_{-\infty}$, $\mathbb{E}[X_{-\infty}1_A] = \mathbb{E}[X_0 1_A]$, d'où le résultat.
3. Soit Y une variable intégrable. Alors $X_n := \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ est une martingale rétrograde, et d'après ci-dessus, lorsque n tend vers moins l'infini : X_n converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers $X_{-\infty}$ où
$$X_{-\infty} = \mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_{-\infty}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_0]\,|\mathcal{F}_{-\infty}] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_{-\infty}].$$
4. Application à la loi forte des grands nombres
   a) Pour calculer $\mathbb{E}[X_{-n}|\mathcal{F}_{-n-1}]$ on remarque que par symétrie, si $j,k \leq n+1$:
   $$\mathbb{E}[\xi_j|\mathcal{F}_{-n-1}] = \mathbb{E}[\xi_k|\mathcal{F}_{-n-1}], \text{ de sorte que}$$
   $$\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_{-n-1}] = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{E}[\xi_k|\mathcal{F}_{-n-1}] = \frac{1}{n+1}\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_{-n-1}] = \frac{S_{n+1}}{n+1}.$$
   Il en découle que
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{-n}|\mathcal{F}_{-n-1}] &= \mathbb{E}[S_{n+1}/n|\mathcal{F}_{-n-1}] - \mathbb{E}[\xi_{n+1}/n|\mathcal{F}_{-n-1}] \\ &= \frac{S_{n+1}}{n} - \frac{S_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{S_{n+1}}{n+1} = X_{-n-1}.\end{aligned}$$
   D'après les théorèmes (1) et (2), la martingale rétrograde X_{-n} converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers $\mathbb{E}[X_1|\mathcal{F}_{-\infty}]$.
   b) Comme les évènements de $\mathcal{F}_{-\infty}$ sont échangeables, la loi du zéro-un de Hewitt-Savage indique que la tribu $\mathcal{F}_{-\infty}$ est triviale.
   c) La tribu asymptotique étant triviale, la variable $\mathbb{E}[X_1|\mathcal{F}_{-\infty}]$ est constante presque sûrement, égale à sa moyenne $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_1|\mathcal{F}_{-\infty}]] = \mathbb{E}[X_1]$, d'où le résultat.