Élements de correction du devoir en temps libre

Exercice 1 : *Fonctions intégrables et fonctions étagées*

Théorème 1 *Soit f une fonction mesurable et intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $[0,1]$. Alors, il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions étagées qui converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1([0,1], d\lambda)$ vers f.*

Soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et pour tout entier naturel n :

$$X_n := \frac{k}{2^n}, \quad \text{si} \quad \frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n}. \tag{1}$$

On pose $Y := f(X)$ et $Y_n := \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ où $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que X_n converge vers X. Quelle signification donner à $2^n(X_n - X_{n-1})$?

   Par définition, on a $|X_n - X| \leq 2^{-n}$, donc $X_n \to X$ presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$. Le nombre $2^n(X_n - X_{n-1})$ n'est autre que le $n-$ième terme dans la décomposition binaire de X.

2. Montrer que Y_n converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$. Identifier sa limite.

   On vérifie facilement que Y_n est une martingale uniformément intégrable de sorte qu'elle converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers la limite $Y_\infty = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_\infty]$ où

   $$\mathcal{F}_\infty = \sigma(X_0, X_1, X_2, \ldots) = \sigma(X).$$

   En effet, la variable X est entièrement caractérisée par sa décomposition dyadique, c'est-à-dire par X_0, X_1, $X_2 \ldots$ Ainsi, on a $Y_\infty = \mathbb{E}[f(X)|X] = f(X)$.

3. Expliciter Y_n et conclure.

   Conditionnellement à la tribu $\mathcal{F}_n$, la loi de X n'est autre que la loi uniforme sur l'intervalle $[X_n, X_n + 2^{-n}]$. On a donc

   $$Y_n = \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[f(X)|X_0, X_1, \ldots, X_n] = \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} f(u) 2^n du = f_n(X)$$

   où la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ est la fonction étagée :

   $$f_n(x) = 2^n \int_{x_n}^{x_n+2^{-n}} f(u) du, \quad \begin{array}{l} x_n \text{ étant le nombre de la forme } k2^{-n} \\ \text{tel que } x_n \leq x < x_n + 2^{-n}. \end{array}$$

   D'après la question précédente, $f_n(X)$ converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers $f(X)$, autrement dit pour presque tout $x \in [0,1]$, on a $f_n(x) \to f(x)$ et

   $$\int_0^1 |f_n(y) - f(y)| dy \to 0.$$

Exercice 2 : *Dérivée de Radon-Nikodým d'une fonction lipschitzienne*

Théorème 2 *Soit f une fonction lipschitzienne sur $[0,1]$, i.e. il existe $C > 0$ telle que*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|, \quad \textit{pour tout} \quad x, y \in [0,1].$$

Alors il existe une fonction mesurable bornée g telle que :

$$f(y) - f(x) = \int_x^y g(z)dz, \quad \textit{pour tout} \quad x, y \in [0,1].$$

Comme précédemment, soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$, etX_n donnée par (1) et $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$. On pose $Z_n := 2^n\left(f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)\right)$.

1. Montrer que Z_n converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers une variable Z_∞.

   La suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n$. En effet, les variables Z_n sont intégrables et adaptées. Par ailleurs, conditionnellement à $\mathcal{F}_n$, la variable X_{n+1} est une variable de Bernoulli : elle vaut X_n ou $X_n + 2^{-n-1}$ avec probabilité $1/2$. On a donc

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \frac{1}{2} \times 2^{n+1}\left(f(X_n + 2^{-n-1}) - f(X_n)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \times 2^{n+1}\left(f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n + 2^{-n-1})\right) \\ &= 2^n\left(f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)\right) = Z_n.\end{aligned}$$

   Par ailleurs, la condition de Lipschitz implique que la suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ est bornée presque sûrement par la constante C : $|Z_n| \leq C$ *p.s.* pour tout $n \geq 0$. La martingale $(Z_n)_{n\geq 0}$ est donc uniformormément intégrable et elle converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers une variable Z_∞ qui est telle que $Z_n = \mathbb{E}[Z_\infty|\mathcal{F}_n]$.

2. Monter Z_∞ est $\sigma(X)-$mesurable et qu'il existe un fonction mesurable bornée g telle que

   $$Z_n = \mathbb{E}[g(X)|\mathcal{F}_n] = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u)du.$$

   Par définition, la variable limite Z_∞ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_\infty = \sigma(X_0, X_1, \ldots)$. Comme dans l'exercice précédent, on a $\mathcal{F}_\infty = \sigma(X)$ de sorte que Z_∞ est $\sigma(X)-$mesurable et il existe une fonction mesurable g telle que $Z_\infty = g(X)$. Autrement dit, on a

   $$Z_n = \mathbb{E}[Z_\infty|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[g(X)|\mathcal{F}_n].$$

   Conditionnellement à la tribu $\mathcal{F}_n$, la loi de X n'est autre que la loi uniforme sur l'intervalle $[X_n, X_n + 2^{-n}]$, on a donc presque sûrement :

   $$Z_n = 2^n\left(f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)\right) = \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u)2^n du.$$

3. En déduire que pour nombre $x \in [0,1]$, on a bien

$$f(x) - f(0) = \int_0^x g(z)dz.$$

La dernière égalité nous dit que, presque sûrement :

$$f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n) = \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)du.$$

Ainsi, pour tout point de la forme $k2^{-n}$, on a

$$f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n}) = \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} g(u)du,$$

d'où en sommant, pour tout réel dyadique x de l'intervalle $[0,1]$:

$$f(x) - f(0) = \int_0^x g(z)dz.$$

Le cas d'un point x générique s'obtient par approximation par les dyadiques grâce à la continuité de f et de l'intégrale.

Exercice 3 : *Inégalité de Hardy-Littlewood*

À une fonction $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on associe Mf sa transformée de Hardy :

$$Mf(x) := \sup_{Q,\, x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy,$$

où le supremum est pris sur tous les cubes contenant x de la forme

$$Q = \prod_{i=1}^d [a_i, a_i + r[, \quad (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d, \quad r > 0, \tag{2}$$

et où $|Q|$ désigne la mesure de Lebesgue de Q.

Théorème 3 *Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, alors pour tout $\alpha > 0$, on a*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d,\, Mf(x) \geq \alpha\right\}\right| \leq \frac{12^d}{\alpha}\int_{\{Mf\geq \alpha/6^d\}} |f(y)|dy \leq \frac{12^d}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|dy.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par $\mathcal{P}_n^\eta$ la $n-$ième partition dyadique de $\mathbb{R}^d$ associée à $\eta \in \{0,1\}^d$:

$$\mathcal{P}_n^\eta := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^d} C_n^\eta(k), \quad \text{où} \quad C_n^\eta(k) := \frac{(-1)^n}{3\times 2^n}\eta + \prod_{i=1}^d \left[\frac{k_i}{2^n}, \frac{k_i+1}{2^n}\right[, \quad k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d.$$

Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on pose pour tout entier naturel n :

$$X_n^\eta(x) := 2^{n\times d}\int_{C_n^\eta(k)} |f(y)|dy, \quad \text{si} \quad x \in C_n^\eta(k), \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

1. Montrer que $X_n^\eta = \mathbb{E}[|f| \,|\, \mathcal{F}_n]$ où $\mathcal{F}_n$ désigne la tribu engendrée par les éléments de $\mathcal{P}_n^\eta$ et où l'espérance est prise sous la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

   Par définition, $X_n^\eta(x)$ est la moyenne uniforme de la fonction $|f|$ sur le cube $C_n^\eta(k)$ de la $n-$ième partition dyadique qui contient x. Conditionnellement à $\{x \in C_n^\eta(k)\} \in \mathcal{F}_n$, la mesure de Lebesgue est précisément la mesure uniforme sur $C_n^\eta(k)$, d'où le résultat.

2. De l'inégalité maximale de Doob, en déduire que

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d,\, M^\eta f(x) \geq \alpha\right\}\right| \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\{M^\eta f \geq \alpha\}} |f(y)| dy,$$

   où l'on a posé

$$M^\eta f(x) := \sup_{\substack{Q \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{P}_n^\eta \\ x \in Q}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy.$$

   On peut vérifier que l'inégalité maximale de Doob que l'on a énoncée en cours pour des mesures de probabilité s'étend aux mesures sigma finies. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ fixé, la suite $(X_{n+m}^\eta)_{n\geq 0}$ est une martingale positive pour la filtration $(\mathcal{F}_{n+m})_{n\geq 0}$. En appliquant l'inégalité maximale pour chaque m fixé, puis en faisant tendre m vers $-\infty$, on obtient le résultat désiré en utilisant la monotonie des deux membres de l'inégalité.

3. Montrer que si Q est comme en (2), et si $r < 1/(3 \times 2^n)$, alors il existe $\eta \in \{0,1\}^d$ et $C \in \mathcal{P}_n^\eta$ tel que $Q \subset C$. En déduire que

$$\max_{\eta \in \{0,1\}^d} M^\eta f \leq Mf \leq 6^d \max_{\eta \in \{0,1\}^d} M^\eta f.$$

   et conclure.

   Pour se convaincre de l'existence d'un élément C de la partition tel que $Q \subset C$, on peut se restreindre au cas de la dimension 1 et faire un dessin ! La première inégalité est claire. Pour la seconde inégalité, on choisit le cube C contenant Q à qui on applique l'inégalité de la question précédente. On perd alors un facteur 6^d qui correspond au rapport des volumes de C et Q. De l'inégalité de la question précédente et de l'encadrement ci-dessus, on déduit alors le résultat désiré en majorant le max par la somme d'où le terme $12^d = 6^d \times 2^d$. Mea culpa pour le terme $\alpha/6^d$ du domaine d'intégration.

4. Question bonus : de l'inégalité de Hardy-Littlewood, déduire le théorème de différentiation de Lebesgue, *i.e.* si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, alors presque sûrement pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, on a :

$$\lim_{B \downarrow \{x\}} \frac{1}{|B|} \int_B f(y) dy = f(x).$$

   En fait, on montre le résultat plus fort suivant : si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, alors

$$\lim_{B \downarrow \{x\}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f(y)| dy = 0, \tag{3}$$

   où la limite est prise sur les boules contenant x et dont le rayon tend vers zéro. Pour cela, on remarque que

$$\widetilde{M} f(x) := \sup_{B,\, x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy \leq \kappa_d M f(x),$$

où $\kappa_d = 2^d/|B(0,1)|$. Par ailleurs, le résultat (3) est trivial si la fonction f est continue à support compact. Il suffit donc de voir que si (3) est vrai pour une suite de fonctions f_n qui converge vers f dans $\mathbb{L}^1$, alors il est vrai pour la limite f. Fixons $\varepsilon > 0$, on a alors pour tout $n \geq 1$:

$$\left|\left\{x,\ \limsup_{B,\, x\in B} \frac{1}{|B|}\int_B |f(x)-f(y)|dy \geq \varepsilon\right\}\right| \leq \left|\left\{x,\ \widetilde{M}(f-f_n)(x) \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right|$$

$$+\left|\left\{x,\ \limsup_{B,\, x\in B} \frac{1}{|B|}\int_B |f_n(x)-f_n(y)|dy \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right| + \left|\left\{x,\ |f_n(x)-f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right|$$

$$\leq \frac{3}{\varepsilon}\left(1+12^d\kappa_d\right)||f_n - f||_{\mathbb{L}^1}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient le résultat désiré.