Fiche de TP n°2 : Martingales

$\boxed{1}$ Ruine du joueur

On s'intéresse à la marche aléatoire $(S_n)_n$ sur $\mathbb{Z}$ définie par

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ S_{n-1} + X_n & \text{si } n \geq 1, \end{cases}$$

où les v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. de loi $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1)$. On notera $q = 1 - p$ et $\rho = q/p$.

[a] Ecrire une fonction qui prend en entrée $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$, génère et trace une trajectoire de longueur n de la marche (S_n).

[b] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère maintenant la marche issue de $k \geq n$ arrêtée quand elle atteint 0 ou n. On note T le temps d'atteinte de l'ensemble $\{0, n\}$. Retrouver par la simulation les résultats théoriques suivants :

(a) Temps moyen d'absorption :

$$\mathbb{E}(T) = \begin{cases} k(n-k) & \text{si } p = 1/2 \\ \frac{n}{p-q}\frac{1-\rho^k}{1-\rho^n} - \frac{k}{p-q} & \text{si } p \neq q, \end{cases}$$

(b) Lieu de sortie :

$$\mathbb{P}(S_T = 0) = \begin{cases} (n-k)/n & \text{si } p = 1/2 \\ \frac{\rho^k - \rho^n}{1-\rho^n} & \text{si } p \neq q, \end{cases}$$

[c] Donner des intervalles de confiance pour chaque estimation.

$\boxed{2}$ On considère $(X_1, X_2, ..., X_n, ...)$ des v.a. i.i.d. suivant la loi normale centrée réduite. Etudier la convergence ou non des martingales :

$$M_1(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i X_{i+1}}{i}$$

et de

$$M_2(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i X_{i+1}}{\sqrt{i}}$$