Université Rennes 1
Master 1 Mathématiques année 2010-2011
Nathalie Krell

Fiche de TP n°1 : Probabilité conditionnelle et autres

Savoir avant toutes choses

[a] Scilab est un logiciel libre que l'on peut télécharger à l'URL suivante : `www.scilab.org`

[b] Scilab possède une aide en ligne. Par ailleurs, plusieurs tutoriels existent sur le web (par exemple : http ://www.iecn.u-nancy.fr/~pincon/scilab/scilab.html).

$\boxed{1}$ Simulation de deux v.a. gaussiennes indépendantes

[a] Soient U_1 et U_2 deux v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$ indépendantes. A la maison on pourra vérifier théoriquement que

$$X = (-2logU_1)^{1/2}cos(2\pi U_2), \;\; Y = (-2logU_1)^{1/2}sin(2\pi U_2)$$

sont indépendantes et de loi normale centrée réduite. On le vérifiera grâce à la simulation. Cette méthode est la méthode de *Box-Muller.*

[b] Une autre méthode bien connue est la méthode polaire. Traduire en scilab l'algorithme suivant.
Etape 1 Générer des v.a. indépendantes U_1 et U_2 de même loi uniforme sur $[0,1]$.
Etape 2 Soient $V_1 = 2U_1 - 1$, $V_2 = 2U_2 - 1$, $S = V_1^2 + V_2^2$.
Etape 3 Si $S > 1$ retourner à l' étape 1.
Etape 4 Représenter les deux variables aléatoires suivantes :

$$X = \sqrt{\frac{-2log(S)}{S}}V_1, \;\; Y = \sqrt{\frac{-2log(S)}{S}}V_2.$$

On pourra vérifier que cet algorithme est correct ; vérifier sa correction par simulation.

$\boxed{2}$

[a] Pour $i \in [1,1000] \cap \mathbb{N}$, on tire une pièce non biaisée à pile ou face ; si on obtient pile, X_i suit une loi de Poisson de paramètre 2, si on obtient face, X_i suit une loi de Poisson de paramètre 3. Simuler les X_i et donner un histogramme de la répartition.

[b] Soit Y une v.a. de loi Binomiale de paramètres $(1000, 1/2)$. On simule Y v.a. indépendantes de loi de Poisson de paramètre 2 et $1000 - Y$ v.a. indépendantes de loi de Poisson de paramètre 3. Quel est le lien avec les X_i précédents ? Illustrer la loi des grands nombres à l'aide de cette famille de v.a. . Quel est le problème ; comment peut-on y remédier ?

$\boxed{3}$ La densité d'une loi Gamma de paramère (α, λ) pour $\alpha >$ et $\lambda > 0$ est

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

[a] Soit X une v.a. de loi $Gamma(\alpha, \lambda)$ et Y une v.a. de loi $Gamma(\beta, \lambda)$ indépendante de X. Quelle est la loi de $X + Y$?

[b] Quel est la loi de la somme de n v.a. de $exponentielle(\lambda)$ indépendantes ? Le vérifier par la simulation.

$\boxed{4}$ Soit N une v.a. de loi de $Poisson(1)$. Soit Y la somme de N v.a. indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. Faire une simulation de 1000 v.a. de même loi que Y conditionnellement à l'événement $\{N = n\}$. Comparer avec la loi théorique. Faire une simulation de 1000 v.a . de même loi que Y .

$\boxed{5}$ Mélange de lois

Interpréter en terme de mélange de lois la densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{2}{3}e^{-2x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Simuler des variables aléatoires indépendantes admettant cette densité.

Mêmes questions avec la densité

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Ecrire une fonction qui

- génère une variable aléatoire N de loi de Poisson de paramètre 1,
- génère N variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p,
- renvoie leur somme S (ou 0 si $N = 0$).

Quelle est la loi de S ? Comment illustrer ce résultat ? Comment l'interpréter ?

$\boxed{6}$ Galton-Watson : Soit X une v.a. discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X = 0) \neq 0$ et $\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) < 1$. En $t = 0$ on a une particule qui au temps $t = 1$ va se subdiviser aléatoirement en k particules avec probabilité $p_k = \mathbb{P}(X = k)$. Et ainsi de suite à tout temps n. Soit Z_n le nombre de particules au temps n. Soit $(X_{i,j})$ une suite i.i.d. de même loi que X. On a donc

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}.$$

Faire des simulations de la loi de Z_n pour diverses lois de X, en particulier un cas où $\mathbb{E}(X) > 1$, $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\mathbb{E}(X) < 1$. Que pouvez vous en dire ?

$\boxed{7}$ Monsieur M. va à la banque pour faire un placement qui va dépendre du marché. Dans un premier temps on va supposer que les taux chaque année sont indépendants de tous ceux qui précèdent. Avec une probabilité 0.8 l'intérêt sera de 20 % et avec probabilité 0.2 il sera de -10 %. On suppose que M. place 100 euros, quelle est l'espérence théorique de son gain en 20, 50 et 100 ans. Le confronter à la réalité.

En réalité le taux va dépendre de l'année précédente de la manière suivante : si le taux à l'année n est de 20 %, à l'année $n + 1$ il sera de 20 % avec probabilité 0.8 et de -10 % avec probabilité 0.2, mais si le taux à l'année n est de -10 % à l'année $n + 1$ il sera de 20 % avec probabilité 0.3 et de -10 % avec probabilité 0.7. On suppose que Monsieur M. place 100 euros ; simuler son espérance de gain sur une durée de 20, 50 et 100 ans.