Devoir en temps libre

à rendre pour le 01.03.2011

L'objet des trois exercices suivants est de démontrer des résultats classiques d'analyse via des méthodes probabilistes et en particulier grâce à la théorie des martingales.

Exercice 1 : *Fonctions intégrables et fonctions étagées*

Théorème 1 *Soit f une fonction mesurable et intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $[0,1]$. Alors, il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions étagées qui converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1([0,1], d\lambda)$ vers f.*

Soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et pour tout entier naturel n :

$$X_n := \frac{k}{2^n}, \quad \text{si} \quad \frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n}. \tag{1}$$

On pose $Y := f(X)$ et $Y_n := \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ où $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que X_n converge vers X. Quelle signification donner à $2^n(X_n - X_{n-1})$?
2. Montrer que Y_n converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$. Identifier sa limite.
3. Expliciter Y_n et conclure.

Exercice 2 : *Dérivée de Radon-Nikodým d'une fonction lipschitzienne*

Théorème 2 *Soit f une fonction lipschitzienne sur $[0,1]$,* i.e. *il existe $C > 0$ telle que*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|, \quad \textit{pour tout} \quad x, y \in [0,1].$$

Alors il existe une fonction mesurable bornée g telle que :

$$f(y) - f(x) = \int_x^y g(z)dz, \quad \textit{pour tout} \quad x, y \in [0,1].$$

Comme précédemment, soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$, X_n donnée par (1) et $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$. On pose $Z_n := 2^n \left(f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)\right)$.

1. Montrer que Z_n converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers une variable Z_∞.
2. Monter Z_∞ est $\sigma(X)-$mesurable et qu'il existe un fonction mesurable bornée g telle que

$$Z_n = \mathbb{E}[g(X)|\mathcal{F}_n] = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u)du.$$

3. En déduire que pour nombre dyadique x, on a bien

$$f(x) - f(0) = \int_0^x g(z)dz,$$

et conclure dans le cas général.

Exercice 3 : *Inégalité de Hardy-Littlewood*

À une fonction $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on associe Mf sa transformée de Hardy :

$$Mf(x) := \sup_{Q,\, x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

où le supremum est pris sur tous les cubes contenant x de la forme

$$Q = \prod_{i=1}^{d} [a_i, a_i + r[, \quad (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d, \quad r > 0, \tag{2}$$

et où $|Q|$ désigne la mesure de Lebesgue de Q.

Théorème 3 *Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, alors pour tout $\alpha > 0$, on a*

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R}^d,\, Mf(x) \geq \alpha \right\} \right| \leq \frac{12^d}{\alpha} \int_{\{Mf \geq \alpha\}} |f(y)| dy.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par $\mathcal{P}_n^\eta$ la $n-$ième partition dyadique de $\mathbb{R}^d$ associée à $\eta \in \{0,1\}^d$:

$$\mathcal{P}_n^\eta := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} C_n^\eta(k), \quad \text{où} \quad C_n^\eta(k) := \frac{(-1)^n}{3 \times 2^n} \eta + \prod_{i=1}^{d} \left[\frac{k_i}{2^n}, \frac{k_i + 1}{2^n} \right[, \quad k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d.$$

Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on pose pour tout entier naturel n :

$$X_n^\eta(x) := 2^{n \times d} \int_{C_n^\eta(k)} |f(y)| dy, \quad \text{si} \quad x \in C_n^\eta(k), \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

1. Montrer que $X_n^\eta = \mathbb{E}[|f| \,|\, \mathcal{F}_n]$ où $\mathcal{F}_n$ désigne la tribu engendrée par les éléments de $\mathcal{P}_n^\eta$ et où l'espérance est prise sous la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.
2. De l'inégalité maximale de Doob, en déduire que

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R}^d,\, M^\eta f(x) \geq \alpha \right\} \right| \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\{M^\eta f \geq \alpha\}} |f(y)| dy,$$

   où l'on a posé

$$M^\eta f(x) := \sup_{\substack{Q \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{P}_n^\eta \\ x \in Q}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy.$$

3. Montrer que si Q est comme en (2), et si $r < 1/(3 \times 2^n)$, alors il existe $\eta \in \{0,1\}^d$ et $C \in \mathcal{P}_n^\eta$ tel que $Q \subset C$. En déduire que

$$\max_{\eta \in \{0,1\}^d} M^\eta f \leq Mf \leq 6^d \max_{\eta \in \{0,1\}^d} M^\eta f.$$

   et conclure.
4. Question bonus : de l'inégalité de Hardy-Littlewood, déduire le théorème de différentiation de Lebesgue, *i.e.* si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, alors presque sûrement pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, on a :

$$\lim_{B \downarrow \{x\}} \frac{1}{|B|} \int_B f(y) dy = f(x).$$