Devoir en temps libre

à rendre pour le 17.02.2011

Exercice : *face à face au casino*

On considère un jeu de hasard entre un joueur et le croupier d'un casino. Le capital total en jeu est 1 : après la $n-$ième partie le capital du joueur est $X_n \in [0,1]$ et le capital du croupier est $1 - X_n$. Au début du jeu, le capital du joueur est une constante $X_0 = p \in]0,1[$ et le capital du croupier est $1 - p$.

La règle du jeu la suivante, après les n premières parties, la probabilité pour le joueur de gagner la $(n+1)-$ième partie est X_n, et la probabilité de perdre est $1 - X_n$. Si le joueur gagne, il obtient la moitié du capital du croupier ; s'il perd, il cède la moitié de son capital au croupier. Ainsi, pour toute fonction borélienne bornée $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) = X_n \times f\left(X_n + \frac{1 - X_n}{2}\right) + (1 - X_n) \times f\left(\frac{X_n}{2}\right), \tag{1}$$

où $(\mathcal{F}_n)$ est la filtration naturelle de la suite (X_n).

1. Montrer que (X_n) est une martingale.
2. Montrer que (X_n) converge *p.s.* et dans $\mathbb{L}^2$ vers une variable Z.
3. Montrer que $\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \mathbb{E}(3X_n^2 + X_n)/4$. En déduire que $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(Z) = p$.
4. Prouver que toute variable aléatoire W, telle que $0 \leq W \leq 1$ et $\mathbb{E}(W(1-W)) = 0$, est une variable de Bernoulli. En déduire la loi de Z.
5. Pour tout $n \geq 0$, on pose $Y_n := 2X_{n+1} - X_n$. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(Y_n = 0|\mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{P}(Y_n = 1|\mathcal{F}_n)$. En déduire la loi de Y_n.
6. On considére les évènements $G_n := \{Y_n = 1\}$ et $H_n := \{Y_n = 0\}$. Montrer que, lorsque n tend vers l'infini, Y_n converge presque sûrement vers la variable Z. En déduire que

   $$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} G_n\right) = p, \qquad \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} H_n\right) = 1 - p.$$

   Les variables $(Y_n)_{n\geq 0}$ sont-elles indépendantes ?
7. Quelle est l'interprétation des résultats des points 4, 5 et 6 en termes de victoire/perte du joueur ?

Problème :

Une filtration rétrograde est une famille $(\mathcal{F}_n)_{n\in -\mathbb{N}}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ indexée par les entiers négatifs et telle que, pour tous $m, n \in -\mathbb{N}$:

$$n \leq m \Longrightarrow \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m.$$

On notera $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n\in -\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ qui est encore une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Définition 1 *Un processus $(X_n)_{n\in -\mathbb{N}}$ indexé par les entiers négatifs est une martingale rétrograde (resp. une surmartingale rétrograde, une sous-martingale rétrograde) relativement à la filtration rétrograde $(\mathcal{F}_n)_{n\in -\mathbb{N}}$ si*

1. *X_n est $\mathcal{F}_n-$mesurable et $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ pour tout $n \in -\mathbb{N}$;*
2. *pour tous $m, n \in -\mathbb{N}$, $n \leq m \Longrightarrow X_n = \mathbb{E}[X_m|\mathcal{F}_n]$.*
   (resp. $X_n \geq \mathbb{E}[X_m|\mathcal{F}_n], X_n \leq \mathbb{E}[X_m|\mathcal{F}_n]$)

Du fait que la filtration $\mathcal{F}_n$ est décroissante, la convergence des martingales rétrogrades est relativement aisée à établir, c'est l'objet de ce problème.

1. Soit (X_n) une martingale rétrograde. En s'inpirant de la démonstration du cas classique vue en cours (majoration du nombre de montées), montrer le théorème suivant :

   Théorème 1 *Lorsque n tend vers moins l'infini, la suite (X_n) converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$.*

2. Montrer que l'on peut identifier la limite :

   Théorème 2 *Si $X_\infty := \lim_{n\to-\infty} X_n$, alors $X_{-\infty} = \mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_{-\infty}]$.*

3. Montrer que pour toute variable intégrable Y, lorsque n tend vers moins l'infini :

$$\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n] \to \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_{-\infty}].$$

4. **Application** : une preuve de la loi forte des grands nombres. Soit $(\xi_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{E}[\xi_n] < \infty$. On note $S_n := \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, $X_{-n} := S_n/n$ et on introduit la filtration rétrograde $\mathcal{F}_{-n} = \sigma(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots) = \sigma(S_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)$.

   a) Montrer que X_{-n} est une martingale rétrograde relativement à $(\mathcal{F}_n)_{n\in -\mathbb{N}}$.

   b) À l'aide de la loi du zéro-un, montrer que la tribu $\mathcal{F}_{-\infty}$ est triviale.

   c) En déduire que lorsque n tend vers l'infini, S_n/n converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers la moyenne $\mathbb{E}[\xi_0]$.