Feuille d'exercices # 5

Exercice 1 *Un système linéaire de suite*
On considère les suites $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et la relation de récurrence suivante pour $n \geq 0$:

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 5u_n + 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} &= u_n + 3v_n - w_n \\ w_{n+1} &= 2w_n. \end{cases}$$

1. On pose $X_n = {}^t(u_n, v_n, w_n)$. Montrer qu'il existe une matrice A de taille 3×3 telle que la relation ci-dessus s'écrit matriciellement $X_{n+1} = AX_n$.
2. En déduire l'expression de X_n en fonction de X_0 et d'une puissance de la matrice A.
3. On montre que la matrice A se diagonalise en $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

   Calculer A^n et en déduire que $u_n = 2^{n-2}\left(1 + 3^{n+1}\right)$, $v_n = 3 \times 2^{n-2}\left(-1 + 3^{n-1}\right)$, $w_n = 2^n$.

Exercice 2 *La suite de Fibonacci et le nombre d'or*
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour $n \geq 0$.

1. On pose $v_n := {}^t(u_{n+1}, u_n)$. Montrer qu'il existe une matrice A telle que $v_{n+1} = Av_n$.
2. En déduire l'expression de v_n en fonction de v_0 et d'une puissance de la matrice A.
3. On introduit le nombre d'or $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et son conjugué $\bar{\varphi} := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que l'on a la relation $A = PDP^{-1}$ où D, P et P^{-1} sont données par

$$D := \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \bar{\varphi} \end{pmatrix}, \quad P := \begin{pmatrix} \varphi & \bar{\varphi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} := \frac{1}{\varphi - \bar{\varphi}} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{\varphi} \\ -1 & \varphi \end{pmatrix}.$$

4. Calculer A^n et en déduire l'expression de u_n comme seule fonction de n, φ et $\bar{\varphi}$.

Exercice 3 *Suite récurrente linéaire d'ordre 3*
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_3 = 2$ et pour $n \geq 0$:

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

1. On pose $v_n = {}^t(u_{n+2}, u_{n+1}, u_n)$. Montrer qu'il existe une matrice A telle que $v_{n+1} = Av_n$.
2. En déduire l'expression de v_n en fonction de v_0 et d'une puissance de la matrice A.
3. On montre que la matrice A se diagonalise en $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/2 & -1/3 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   En déduire les puissances successives de A et l'expression de u_n comme seule fonction de n.