Feuille d'exercices # 4

Exercice 1 *Matrice nilpotente et puissance*

On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Écrire A sous la forme $A = 2I + N$, puis calculer les puissances successives de N.
2. En déduire A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 2 *Matrice inversible et puissance*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer Ae_1 et Ae_2.
2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer $P^{-1}AP$.
3. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 3 *Puissance et inversibilité*

On considère la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. En déduire les puissances successives de A.
3. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 4 *Matrice de rotation*

On considère la matrice $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

1. À l'aide des formules de trigonométrie, calculer $A(\theta) \times A(\theta')$ pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.
2. En déduire l'expression de $\big(A(\theta)\big)^n$ pour $n \geq 1$.

Exercice 5 *Exponentielle de matrice*

L'exponentielle d'une matrice M est par définition la limite de la somme

$$e^M := I + M + \frac{M^2}{2} + \frac{M^3}{6} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}.$$

Nous admettrons que cette limite existe (c'est un théorème d'analyse).

1. Montrer que si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$ (on pourra passer à la limite sans justifier).
2. Trouver un exemple simple où $e^{A+B} \neq e^A e^B$
3. Calculer e^M dans les cas où la matrice M est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 *Équation différentielle linéaire et exponentielle de matrice*
On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A s'écrit $A = PDP^{-1}$ avec
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
2. En déduire les solutions du système d'équations différentielles $\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$.

Exercice 7 *Équation différentielle linéaire et exponentielle de matrice, le retour*
On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -15 & 44 \\ -10 & 27 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A s'écrit $A = PDP^{-1}$ avec
$$P = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 11 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
2. Déterminer les solutions du système d'équations différentielles $\begin{cases} x' = -15x + 44y \\ y' = -10x + 27y \end{cases}$.

Exercice 8 *Équation différentielle linéaire et exponentielle de matrice nilpotente*
On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A vérifie $(A - I)^3 = 0$.
2. Pour $t \geq 0$, calculer l'exponentielle e^{tA}.
3. En déduire la solution, issue de $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ et $z(0) = -1$, du système d'équations
$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x \\ z' = x + y + z \end{cases}.$$

Exercice 9 *Équation différentielle linéaire et exponentielle de matrice non diagonalisable*
On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A s'écrit $A = PMP^{-1}$ avec
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Pour $t \geq 0$, calculer l'exponentielle e^{tA} (Cf exercice 5).
3. En déduire les solutions du système d'équations linéaires $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$.