

## FEUILLE D'EXERCICES # 3

### Exercice 1 *Développement limité*

1. Donner le développement limité en 1 à l'ordre 3 de  $f(x) = \sqrt{x}$ .
2. Donner le développement limité en 1 à l'ordre 3 de  $g(x) = e^{\sqrt{x}}$ .
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 en  $\frac{\pi}{3}$  de  $h(x) = \ln(\sin x)$ .

### Exercice 2 *Développement limité, le retour*

Donner le développement limité en zéro des fonctions suivantes :

1.  $\cos x \cdot \exp x$  à l'ordre 3,
2.  $(\ln(1+x))^2$  à l'ordre 4,
3.  $\exp(\sin(x))$  à l'ordre 4,
4.  $\sin^6(x)$  à l'ordre 9,
5.  $\ln(\cos(x))$  à l'ordre 6,
6.  $\frac{1}{\cos x}$  à l'ordre 4,
7.  $\tan x$  à l'ordre 5 (ou 7 pour les plus courageux)

### Exercice 3 *Développement limité et asymptotique*

1. Donner un développement limité à l'ordre 2 de  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$  en zéro.
2. En déduire un développement à l'ordre 2 en  $+\infty$ .

### Exercice 4 *Limite via un développement limité*

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}.$$

### Exercice 5 *Dérivée itérée*

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{x^3}{1+x^6}$ . Calculer  $f^{(n)}(0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 6 *Points fixes de la tangente*

1. Montrer que pour  $n \in \mathbb{N}$ , l'équation  $\tan x = x$  a une unique solution  $x_n$  dans  $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ .
2. Quelle relation lie  $x_n$  et  $\arctan(x_n)$  ?
3. Quelle est la limite de  $x_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini ?
4. Donner un développement asymptotique de  $x_n$  à l'ordre 2.