Feuille d'exercices # 2

Exercice 1 *Vrai ou faux ?*
Justifier ou infirmer les assertions suivantes.

1. La suite $(n - \sqrt{1+n})_n$ est majorée.
2. Une suite strictement croissante tend vers $+\infty$.
3. Une suite positive de limite nulle est décroissante à partir d'un certain rang.
4. $(|u_n|)$ converge si et seulement si (u_n) converge.
5. Si $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0, alors (u_n) converge.

Exercice 2 *Vrai ou faux ? Le retour.*
Justifier ou infirmer les assertions suivantes.

1. $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si $u_n - v_n$ tend vers 0.
2. $u_n \underset{\infty}{\sim} u_{n+1}$.
3. $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ implique $u_n + w_n \underset{\infty}{\sim} v_n + w_n$.
4. $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ implique $\exp(u_n) \underset{\infty}{\sim} \exp(v_n)$.
5. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites strictement positives, $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ implique $\ln(u_n) \underset{\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

Exercice 3 *Suite extraites.*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Que pensez-vous des propositions suivantes :

1. Si $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers ℓ.
2. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
3. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite ℓ, il en est de même de $(u_n)_n$.

Exercice 4 *Simplification.*
Posons $u_2 := 1 - \frac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n \geq 3$,

$$u_n := \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

En écrivant $1 - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{(k-1)(k+1)}{k \times k}$, calculer u_n. En déduire que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 5 *La série harmonique.*
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. En utilisant une intégrale, montrer que pour tout $n > 0$: $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
2. En déduire que $\ln(n+1) \leq u_n \leq \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de u_n.
4. Montrer que $v_n = u_n - \ln(n)$ est décroissante et positive. Conclure.

Exercice 6 *La série des inverses des racines carrées.*
Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Étudier la nature de la suite (u_n).
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

3. En déduire un équivalent de (u_n).

Exercice 7 *Suite implicite.*
Pour tout réel $x > 0$, on définit la fonction f par $f(x) := x + \ln(x)$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif, il existe un unique x_n tel que $f(x_n) = n$. Explicitez x_1.
2. Étudier la monotonie et la convergence de la suite (x_n).
3. Étudier le signe de $f(n) - n$ pour tout entier $n > 0$. En déduire que $x_n \leq n$. Par une méthode analogue, montrer que $n - \ln(n) \leq x_n$.
4. Donner un équivalent de x_n en $+\infty$.

Exercice 8 *Suite implicite, le retour.*
Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) := x^5 + nx - 1.$$

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists!\, u_n \in \mathbb{R},\ f_n(u_n) = 0$$
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, 1]$.
3. Calculer $f_{n+1}(u_n)$ en fonction de u_n.
4. En déduire la monotonie de la suite (u_n).
5. Montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite ℓ appartient à $[0, 1]$.
6. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que $\ell = 0$.
7. Donner un équivalent de u_n.

Exercice 9 *Suite implicite, la revenge.*
Pour tout réel $x > 0$, on définit la fonction f par $f(x) := x \exp(x)$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif, il existe un unique u_n tel que $f(u_n) = n$.
2. Étudier la monotonie et la convergence de la suite (u_n).
3. Montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.