

## FEUILLE D'EXERCICES # 1

### Exercice 1 *Logarithmes et puissances*

Soit  $x$  un nombre réel. On pose  $f(x) = x^2 \ln(x)$ . Calculer  $f$  en les valeurs suivantes :

$$e, \quad \frac{1}{e}, \quad \sqrt{e}, \quad e^2, \quad e\sqrt{e}, \quad \frac{1}{e^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

### Exercice 2 *Simplification*

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \ln((\sqrt{3} + 1)^{18}) + \ln((\sqrt{3} - 1)^{18}), \quad B = \ln\left(\frac{1}{e^{-x}}\right),$$

$$C = \sqrt{\exp\left(x - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)\right)}, \quad D = \left[\exp\left(-\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\right)\right]^{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}.$$

### Exercice 3 *Simplification, le retour*

Soit  $n$  un entier naturel et  $x$  un réel strictement positif. Simplifier :

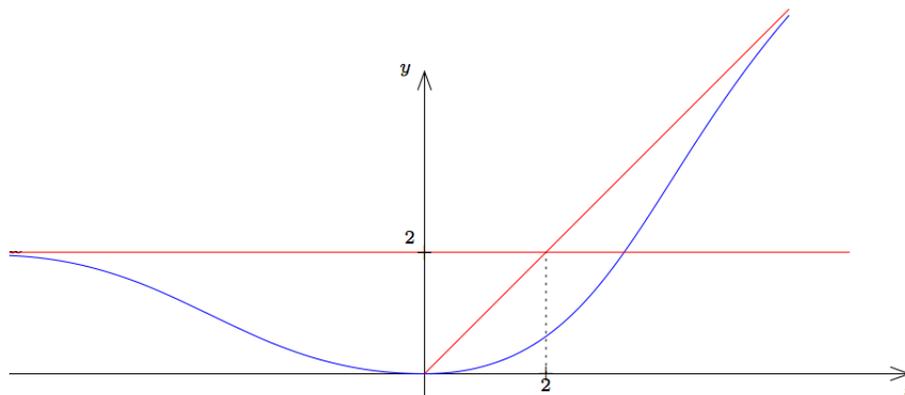
$$A = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^5}, \quad B = (\sqrt[6]{3})^3, \quad C = \sqrt[5]{3} \sqrt[3]{9} \sqrt[15]{3^2},$$

$$D = \frac{x^3 x^{5n}}{x^{2n} x^5}, \quad E = (x^{-n+1})^2 (x^3)^{n-2}, \quad F = (2^{2n})^{(2n)^{2n}}.$$

### Exercice 4 *Limites et asymptotes*

Voici la courbe représentative d'une fonction  $f$ . Donner la valeur des limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$



### Exercice 5 *Sur les équivalents*

Justifier les équivalents suivants :

$\cosh(x) \underset{+\infty}{\sim} \sinh(x)$	$\sin(x) + x \underset{+\infty}{\sim} x$	$\ln(2x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$	$\sqrt{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} x$
$1 + 2x \underset{0}{\sim} 1 + x$	$1 + 2x \underset{0}{\sim} 1$	$1 + 2x \underset{+\infty}{\sim} 2x$	$\ln(t) \underset{1}{\sim} t - 1$
$(1+x)^x \underset{0}{\sim} 1$	$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{\ln(1+2\tan(x))}{\sin(x)} \underset{0}{\sim} 2$	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \underset{+\infty}{\sim} e$

**Exercice 6** *Comportement au bord du domaine de définition*

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes leur ensemble de définition et leurs limites aux bornes de cet ensemble.

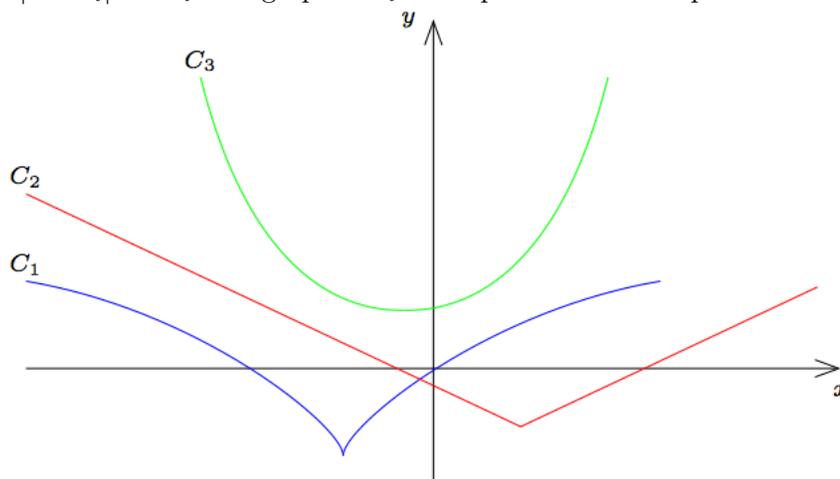
$$f_1(x) = e^x - x^2, \quad f_2(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 + 5x + 7}, \quad f_3(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}, \quad f_4(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x,$$
$$g_1(x) = \frac{\ln(x^2 + 2)}{2x}, \quad g_2(x) = \frac{e^{3x}}{x^2 + e^x}, \quad g_3(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x, \quad g_4(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

**Exercice 7** Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? On justifiera les propositions vraies en faisant une démonstration et on donnera un contre-exemple aux propositions fausses. La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

1. Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
2. Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ .
3. Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
4. Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ .

**Exercice 8** *Graphes de fonctions*

1. Soient  $\alpha$ ,  $a$  et  $b$  trois réels. On définit la fonction  $f$  par  $f(x) = |x - a|^\alpha + b$ . Déterminer  $\alpha$ ,  $a$  et  $b$  tels que la courbe représentative  $C_f$  de  $f$  admette :
  - une asymptote d'équation  $y = 1$  ;
  - un axe de symétrie d'équation  $x = 2$  ;
  - une tangente de pente  $-1/2$  en  $x_0 = 3$ .Tracer le graphe de la fonction obtenue.
2. Soient  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$  des réels. On considère les trois fonctions définies par  $f_i(x) = |x - a_i|^{\alpha_i} + b_i$ . Les graphes  $C_i$  correspondants sont représentés ci-dessous :



- Classer les  $\alpha_i$  par ordre croissant ;
- Classer les  $a_i$  par ordre croissant ;
- Classer les  $b_i$  par ordre croissant.

**Exercice 9** *Calculs de limites*

Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

- |   |   |
|---|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln x}$   | 2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x + \sqrt{x})$  |
| 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \ln x}$                                    | 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$  |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$  | 6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln(x+1)}$  |
| 7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} \ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right)$                 | 8) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2 - 1) \ln(7x^3 + 4x^2 + 3)$                                     |
| 9) $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \ln(x^3 - 8)$  | 10) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^x - 1)}{\ln(x+1)}$  |
| 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x \ln(x+2))$   | 12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2 - x}$                                    |
| 13) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x}$  | 14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{3x}$                                |
| 15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$             | 16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}}$                   |
| 17) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln x}}$   | 18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{(x^x-1)}}{x^{(x^x)}}$                                    |
| 19) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$  | 20) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$                             |
| 21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x}$  | 22) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x) \sin x}{x^3 + 2x^2}$                                    |
| 23) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$                                    | 24) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$             |
| 25) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos(1/x)}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$ | 26) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos(1/x)}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$ |
| 27) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$               | 28) $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\tan(\pi x/2)}$  |

Éléments de réponse :

- |               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|
| 1) $-\infty$  | 2) 0          | 3) $+\infty$  |
| 4) $+\infty$  | 5) $3/2$      | 6) 0          |
| 7) 0          | 8) 0          | 9) 0          |
| 10) 0         | 11) $-2$      | 12) $-\infty$ |
| 13) 1         | 14) $e^3$     | 15) 1         |
| 16) $e$       | 17) $e$       | 18) 0         |
| 19) 0         | 20) 0         | 21) $1/2$     |
| 22) $-1/2$    | 23) 1         | 24) 1         |
| 25) $+\infty$ | 26) $-\infty$ | 27) 1         |
| 28) 1.        |               |               |