Université de Rennes 1 — L1 MIEE

Compléments de mathématiques — année 2014-2015

Devoir en temps libre # 2

À rendre le 17-18 mars 2015

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour $n \geq 0$:

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Le but de l'exercice est d'expliciter le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ comme seule fonction de l'entier n. On propose deux méthodes.

1. Puissance de matrices.
   (a) On pose $v_n := \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice A de taille 2×2 telle que
   $$v_{n+1} = Av_n.$$
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de v_0 et d'une puissance de la matrice A.
   (c) Montrer que l'on a la relation $A = PDP^{-1}$ où D, P et P^{-1} sont données par
   $$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (d) Calculer A^n et en déduire l'expression de u_n comme seule fonction de n.
2. Un calcul élémentaire.
   (a) Pour $n \geq 0$, on pose $w_n := u_{n+1} - u_n$. Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n.
   (b) Expliciter w_n comme seule fonction de n et w_0.
   (c) Retrouver alors l'expression de u_n comme seule fonction de n.