Devoir en temps libre # 1

À rendre le 3-4 février 2015

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1.$$

1. Les zéros de la fonction f_n.
   (a) Quel est le signe de $f_n(0)$? de $f_n(1)$?
   (b) Étudier les variations de f_n sur $[0, +\infty[$.
   (c) Donner la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (d) En déduire que f_n s'annule sur $[0, +\infty[$ en exactement deux réels u_n et v_n tels que $u_n < 1 < v_n$.
2. Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 2}$?
3. Convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.
   (a) Calculer $e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n.
   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
   (c) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.
   (d) En déduire que $(u_n)_{n\geq 2}$ est convergente et donner un encadrement de sa limite ℓ.
4. Soit g_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g_n(x) := \ln(3) + n\ln(x) - x^2$.
   (a) Soit $t > 0$. Montrer que $g_n(t) = 0$ si et seulement si $f_n(t) = 0$.
   (b) En déduire, en raisonnant par l'absurde, que $\ell = 1$ (on utilisera la relation $g_n(u_n) = 0$).
   (c) On pose, pour $n \geq 2$, $w_n = u_n - 1$. En utilisant la relation $g_n(1 + w_n) = 0$, trouver un équivalent de w_n.