Devoir en temps libre # 1

Éléments de correction

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit f_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1.$$

1. Les zéros de la fonction f_n.
   (a) Quel est le signe de $f_n(0)$? de $f_n(1)$?
   On a $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = 3/e - 1 > 0$.
   (b) Étudier les variations de f_n sur $[0,+\infty[$.
   La fonction f_n est dérivable, de dérivée continue donnée par

   $$f_n'(x) = 3nx^{n-1}e^{-x^2} + 3x^n(-2x)e^{-x^2} = 3x^{n-1}e^{-x^2}(n-2x^2).$$

   Le signe de f_n' sur $[0,+\infty[$ est donc celui de $(n-2x^2)$ et le tableau de variation de f_n est donc

x	$\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$	$\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$
$f_n'(x)$	$+$	$-$
$f_n(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

   (c) Donner la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   Lorsque x tend vers l'infini, x^n tend vers l'infini et e^{-x^2} tend vers zéro. L'exponentielle domine tout puissance de x donc le produit $x^n e^{-x^2}$ tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini et finalement $f_n(x)$ tend vers -1.
   (d) En déduire que f_n s'annule sur $[0,+\infty[$ en exactement deux réels u_n et v_n tels que $u_n < 1 < v_n$.
   On remarque que le maximum m_n de la fonction f_n est positif, en effet

   $$m_n := f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = 3\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)^n e^{-n/2} - 1 = 3\exp\left(\frac{n}{2}\left(\log\left(\frac{n}{2}\right) - 1\right)\right) - 1 > 0.$$

   Autrement dit, la fonction f_n est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1, m_n]$ qui contient 0. D'après le théorème de la bijection (ou des valeurs intermédiaires), il existe un unique u_n dans $[0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ tel que $f_n(u_n) = 0$. Comme $1 \in [0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ et que $f_n(1) > 0$, on peut affirmer que $u_n < 1$.
   De la même façon, f_n est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$ et prend ses valeurs dans $[-1, m_n]$. Toujours d'après le théorème de la bijection (ou des valeurs intermédiaires), il existe un unique v_n dans $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$ tel que $f_n(v_n) = 0$. En particulier, $v_n > \sqrt{\frac{n}{2}} \geq 1$.

2. Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 2}$?
   D'après ci-dessus, $v_n > \sqrt{\frac{n}{2}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
3. Convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.
   (a) Calculer $e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n.
   Par définition de u_n comme zéro de f_n, on a

$$f_n(u_n) = 3(u_n)^n e^{-u_n^2} - 1 = 0 \quad i.e. \quad e^{-u_n^2} = \frac{1}{3(u_n)^n}.$$

   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
   D'après la question précédente et comme on a vu que $u_n < 1$, il vient :

$$f_{n+1}(u_n) = 3(u_n)^{n+1} e^{-u_n^2} - 1 = \frac{3(u_n)^{n+1}}{3(u_n)^n} - 1 = u_n - 1 < 0.$$

   (c) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.
   Par définition de u_{n+1}, on a $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ donc la question précédente nous dit que

$$f_{n+1}(u_n) - f_{n+1}(u_{n+1}) < 0.$$

   De plus, sur l'intervalle $[0, \sqrt{\frac{n+1}{2}}]$ qui contient $[0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ et qui contient donc en particulier u_n, la fonction f_{n+1} est strictement croissante. On a donc naturellement $u_n < u_{n+1}$ i.e. la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante.
   (d) En déduire que $(u_n)_{n\geq 2}$ est convergente et donner un encadrement de sa limite ℓ.
   La suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est positive croissante et majorée par 1, elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite, on a alors $0 \leq \ell \leq 1$.
4. Soit g_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g_n(x) := \ln(3) + n\ln(x) - x^2$.
   (a) Soit $t > 0$. Montrer que $g_n(t) = 0$ si et seulement si $f_n(t) = 0$.
   On a la relation

$$g_n(t) = \log\left(f_n(t) + 1\right),$$

   donc g_n s'annule si et seulement si f_n s'annule.
   (b) En déduire, en raisonnant par l'absurde, que $\ell = 1$ (on utilisera la relation $g_n(u_n) = 0$).
   Si u_n tendait vers $\ell < 1$ lorsque n tend vers l'infini, $n\log(u_n)$ tendrait vers moins l'infini. Comme $\log(3) - u_n^2$ est borné, lorsque n tend vers l'infini, $g_n(u_n) = \log(3) + n\log(u_n) - u_n^2$ tendrait vers moins l'infini, ce qui est absurde car $g_n(u_n) = 0$.
   (c) On pose, pour $n \geq 2$, $w_n = u_n - 1$. En utilisant la relation $g_n(1 + w_n) = 0$, trouver un équivalent de w_n.
   On a $g_n(u_n) = 0$ c'est-à-dire $\log(3) + n\ln(u_n) - u_n^2 = 0$. Or, comme u_n tend vers 1, $w_n = u_n - 1$ tend vers zéro et on sait que $\log(u_n) = \log(1 + w_n) \sim w_n$. On a donc

$$0 = \log(3) + n\ln(u_n) - u_n^2 = \log(3) + n \times w_n(1 + o(1)) - 1 + o(1)$$

   puis en divisant par n :

$$w_n = \frac{1 - \log(3)}{n} \times (1 + o(1)),$$

   et finalement $w_n \sim \frac{1-\log(3)}{n}$.