

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DU CONTRÔLE CONTINU # 1

Exercice 1 *Calcul de limite*

Soient a et b deux réels strictement positifs. Le but de l'exercice est d'établir la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + a^x - b^x)^{1/x} = \frac{a}{b}.$$

On rappelle que par définition, si $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ alors $a^x = \exp(x \log(a))$. Par ailleurs, le développement limité en zéro de la fonction exponentielle à l'ordre ℓ est le suivant :

$$e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^\ell}{\ell!} + o(x^\ell) = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{x^k}{k!} + o(x^\ell).$$

1. Montrer que lorsque x tend vers zéro, le développement limité à l'ordre 1 de $(a^x - b^x)$ est

$$(a^x - b^x) = \log(a/b)x + o(x).$$

D'après les rappels de l'énoncé, lorsque x tend vers zéro, on a

$$a^x = 1 + x \log(a) + o(x), \quad b^x = 1 + x \log(b) + o(x),$$

donc

$$(a^x - b^x) = (\log(a) - \log(b))x + o(x) = \log(a/b)x + o(x).$$

2. On fixe $c \in \mathbb{R}$, rappeler le développement limité à l'ordre 1 de $\log(1 + cx)$ lorsque x tend vers zéro. D'après le cours, lorsque x tend vers zéro, on a

$$\log(1 + cx) = cx + o(x).$$

3. Conclure.

On cherche la limite lorsque x tend vers zéro de $(1 + a^x - b^x)^{1/x}$ c'est-à-dire la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{1}{x} \log(1 + a^x - b^x)\right).$$

D'après les deux questions précédentes, lorsque x tend vers zéro, on a

$$\log(1 + a^x - b^x) = \log(1 + \log(a/b)x + o(x)) = \log(a/b)x + o(x),$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log(1 + a^x - b^x) = \log(a/b).$$

La fonction exponentielle étant continue, on conclut que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{1}{x} \log(1 + a^x - b^x)\right) = \exp(\log(a/b)) = a/b.$$

Exercice 2 *Comportement asymptotique d'une suite implicite*

Pour tout entier $n \geq 2$, on définit une fonction f_n sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^n x^k.$$

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$ fixé, l'équation en x suivante $f_n(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle dans ouvert $]0, 1[$, notée u_n .

Un calcul immédiat donne $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = n > 1$. Par ailleurs, la fonction f_n est dérivable et sa dérivée

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$$

est strictement positive sur $]0, 1[$. La fonction f_n est donc strictement croissante et d'après le théorème de la bijection (ou des valeurs intermédiaires), il existe un unique $u_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(u_n) = 1$.

2. Calculer $f_{n+1}(u_n)$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Par définition, pour tout $n \geq 2$, on a $f_n(u_n) = 1$ et $0 < u_n < 1$ donc

$$f_{n+1}(u_n) = \sum_{k=1}^{n+1} u_n^k = \sum_{k=1}^n u_n^k + u_n^{n+1} = f_n(u_n) + u_n^{n+1} = 1 + u_n^{n+1} > 1 = f_{n+1}(u_{n+1}).$$

Comme f_{n+1} est strictement croissante, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$.

3. À $x \in]0, 1[$ fixé, déterminer la limite croissante de $f_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.

La fonction f_n n'est autre qu'une somme partielle de la série géométrique et l'on sait que

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{donc} \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 1 = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Si $x \in]0, 1[$ alors x^{n+1} tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, donc la limite croissante de f_n est donnée par

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{x}{1 - x}.$$

4. Que vaut cette limite lorsque $x = 1/2$? En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par $\frac{1}{2}$. Lorsque $x = 1/2$, le calcul ci-dessus montre que la limite croissante de $f_n(1/2)$ vaut 1. En particulier, on a $f_n(1/2) < 1$ pour tout $n \geq 2$, ce qui implique en particulier que $u_n \geq 1/2$.
5. Montrer qu'en fait, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $1/2$, elle converge donc vers une limite $\ell \geq 1/2$. Comme u_n est décroissante et f_n est strictement croissante, on a pour tout $n \geq 2$:

$$1 = f_n(u_n) > f_n(\ell),$$

et en passant à la limite

$$1 \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\ell) = \frac{\ell}{1 - \ell},$$

donc $1 - \ell \geq \ell$ dont on déduit que $\ell \leq 1/2$. Finalement, on a bien $\ell = 1/2$.