Éléments de correction du contrôle continu # 1

Exercice 1 *Calcul de limite*

Soient a et b deux réels strictement positifs. Le but de l'exercice est d'établir la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}=\sqrt{ab}.$$

On rappelle que par définition, si $a>0$ et $x\in\mathbb{R}$ alors $a^x=\exp(x\log(a))$. Par ailleurs, le développement limité en zéro de la fonction exponentielle à l'ordre ℓ est le suivant :

$$e^x=1+x+\ldots+\frac{x^\ell}{\ell!}+o\left(x^\ell\right)=\sum_{k=0}^{\ell}\frac{x^k}{k!}+o\left(x^\ell\right).$$

1. Montrer que lorsque x tend vers zéro, le développpement limité à l'ordre 1 de $\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)$ est
$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)=1+\log\left(\sqrt{ab}\right)x+o(x).$$
D'après les rappels de l'énoncé, lorsque x tend vers zéro, on a
$$a^x=1+x\log(a)+o(x),\quad b^x=1+x\log(b)+o(x),$$
donc
$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)=1+\frac{1}{2}\left(\log(b)+\log(a)\right)x+o(x)=1+\log(\sqrt{ab})x+o(x).$$

2. On fixe $c\in\mathbb{R}$, rappeler le développement limité à l'ordre 1 de $\log(1+cx)$ lorsque x tend vers zéro.
D'après le cours, lorsque x tend vers zéro, on a
$$\log(1+cx)=cx+o(x).$$

3. Conclure.
On cherche la limite lorsque x tend vers zéro de $\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ c'est-à-dire la limite
$$\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x}\log\left(\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)\right).$$
D'après les deux questions précédentes, lorsque x tend vers zéro, on a
$$\log\left(\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)=\log\left(1+\log(\sqrt{ab})x+o(x)\right)=\log(\sqrt{ab})x+o(x),$$
d'où
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)=\log(\sqrt{ab}).$$
La fonction exponentielle étant continue, on conclut que
$$\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x}\log\left(\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)\right)=\exp\left(\log(\sqrt{ab})\right)=\sqrt{ab}.$$

Exercice 2 *Comportement asymptotique d'une suite implicite*
Pour tout entier $n \geq 2$, on définit une fonction f_n sur l'intervalle $[0,1]$ par

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} x^k.$$

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$ fixé, l'équation en x suivante $f_n(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle dans ouvert $]0,1[$, notée u_n.
   Un calcul immédiat donne $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = n > 1$. Par ailleurs, la fonction f_n est dérivable et sa dérivée
   $$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$
   est strictement positive sur $]0,1[$. La fonction f_n est donc strictement croissante et d'après le théorème de la bijection (ou des valeurs intermédiaires), il existe un unique $u_n \in]0,1[$ tel que $f_n(u_n) = 1$.
2. Calculer $f_{n+1}(u_n)$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   Par définition, pour tout $n \geq 2$, on a $f_n(u_n) = 1$ et $0 < u_n < 1$ donc
   $$f_{n+1}(u_n) = \sum_{k=1}^{n+1} u_n^k = \sum_{k=1}^{n} u_n^k + u_n^{n+1} = f_n(u_n) + u_n^{n+1} = 1 + u_n^{n+1} > 1 = f_{n+1}(u_{n+1}).$$
   Comme f_{n+1} est stricement croissante, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$.
3. À $x \in]0,1[$ fixé, déterminer la limite croissante de $f_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.
   La fonction f_n n'est autre qu'une somme partielle de la série géométrique et l'on sait que
   $$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad \text{donc} \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1 = \frac{x-x^{n+1}}{1-x}.$$
   Si $x \in]0,1[$ alors x^{n+1} tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, donc la limite croissante de f_n est donnée par
   $$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{x}{1-x}.$$
4. Que vaut cette limite lorsque $x = 1/2$? En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\frac{1}{2}$.
   Lorsque $x = 1/2$, le calcul ci-dessus montre que la limite croissante de $f_n(1/2)$ vaut 1. En particulier, on a $f_n(1/2) < 1$ pour tout $n \geq 2$, ce qui implique en particulier que $u_n \geq 1/2$.
5. Montrer qu'en fait, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $1/2$, elle converge donc vers une limite $\ell \geq 1/2$. Comme u_n est décroissante et f_n est strictement croissante, on a pour tout $n \geq 2$:
   $$1 = f_n(u_n) > f_n(\ell),$$
   et en passant à la limite
   $$1 \geq \lim_{n\to+\infty} f_n(\ell) = \frac{\ell}{1-\ell},$$
   donc $1 - \ell \geq \ell$ dont on déduit que $\ell \leq 1/2$. Finalement, on a bien $\ell = 1/2$.