Université de Rennes 1 — L1 MIEE
Compléments de mathématiques — année 2014-2015

Contrôle continu # 1

Exercice 1 *Calcul de limite*
Soient a et b deux réels strictement positifs. Le but de l'exercice est d'établir la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} (1 + a^x - b^x)^{1/x} = \frac{a}{b}.$$

On rappelle que par définition, si $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ alors $a^x = \exp(x\log(a))$. Par ailleurs, le développement limité en zéro de la fonction exponentielle à l'ordre ℓ est le suivant :

$$e^x = 1 + x + \ldots + \frac{x^\ell}{\ell!} + o\left(x^\ell\right) = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^\ell\right).$$

1. Montrer que lorsque x tend vers zéro, le développpement limité à l'ordre 1 de $(a^x - b^x)$ est

$$(a^x - b^x) = \log(a/b)\, x + o(x).$$

2. On fixe $c \in \mathbb{R}$, rappeler le développement limité à l'ordre 1 de $\log(1 + cx)$ lorsque x tend vers zéro.
3. Conclure.

Exercice 2 *Comportement asymptotique d'une suite implicite*
Pour tout entier $n \geq 2$, on définit une fonction f_n sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} x^k.$$

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$ fixé, l'équation en x suivante $f_n(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle dans ouvert $]0, 1[$, notée u_n.
2. Calculer $f_{n+1}(u_n)$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. À $x \in]0, 1[$ fixé, déterminer la limite croissante de $f_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.
4. Que vaut cette limite lorsque $x = 1/2$? En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\frac{1}{2}$.
5. Montrer qu'en fait, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.