

## PESKED ARGERZH

Ce document a pour but d'illustrer, à l'aide Scilab, quelques propriétés des processus de Poisson. Les exercices à traiter en priorité sont indiqués en **rouge**.

### 1 Définition, représentations, simulation

On rappelle dans un premier temps la définition d'un processus de Poisson (simple).

**Définition 1.** *Un processus de Poisson (simple)  $(N_t)_{t \geq 0}$  d'intensité  $\lambda$  est un processus stochastique issu de zéro, à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et tel que :*

1. *pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , la variable aléatoire  $N_t$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ ,*
2. *pour tout  $(s, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ , les variables  $N_{t+s} - N_t$  et  $N_t$  sont indépendantes.*

Un tel processus se représente facilement à partir de la donnée d'une suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . En effet, si on pose  $T_n := S_1 + \dots + S_n$ , on vérifie que le processus  $(N_t)_{t \geq 0}$  défini par

$$N_t := \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{T_n \leq t},$$

est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ .

**Exercice 1.** *Montrer que la variable  $T_n$  suit une loi  $\Gamma(n, \lambda)$  et illustrer cette identité en superposant un histogramme empirique à la densité cible.*

**Proposition 1** (Loi conditionnelle des temps de saut). *Sachant que  $N_t = k$  (avec  $k \geq 1$ ), la loi du  $k$ -uplet  $(T_1, \dots, T_k)$  coïncide avec celle d'un  $k$ -échantillon ordonné de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur  $[0, t]$ .*

**Exercice 2.** *Simulation de trajectoires.*

1. *Simuler et afficher une trajectoire d'un processus de Poisson simple d'intensité  $\lambda = 1/5$  jusqu'à son 20ième saut.*
2. *Simuler une trajectoire de processus de Poisson d'intensité  $\lambda = 1/5$  jusqu'à l'instant  $t = 20$* 
  - (a) *à l'aide d'une boucle `while`,*
  - (b) *à l'aide de la proposition 1.*

*Comparer ces deux méthodes en générant mille trajectoires avec chaque méthode et mesurer le temps de calcul grâce aux commandes `timer`, ou encore `tíc` et `tac`.*

3. *Illustrer le fait que  $N_t$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ .*
4. *(Pour celles et ceux qui sont le plus à l'aise) Reprendre la question précédente en effectuant un test du  $\chi^2$  d'adéquation.*

Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a l'encadrement  $T_{N_t} \leq t < T_{N_t+1}$ . On définit des variables aléatoires réelles positives  $U_t$  et  $V_t$  par

$$U_t := t - T_{N_t}, \quad V_t := T_{N_t+1} - t,$$

de sorte que  $U_t$  mesure la durée entre le temps courant et le temps du dernier saut, et  $V_t$  mesure la durée entre le temps courant et l'instant du prochain saut. On démontre le résultat suivant :

**Proposition 2.** *Pour tout  $t \geq 0$ , les variables aléatoires  $U_t$  et  $V_t$  sont indépendantes. La loi de  $U_t$  est celle de  $S_1 \wedge t$  et celle de  $V_t$  est égale à celle de  $S_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$ .*

**Exercice 3.** *Paradoxe de l'inspection.*

1. Montrer que l'espérance de la longueur de l'intervalle  $[T_{N_t}, T_{N_t+1}]$  est égale à  $\lambda^{-1}(2 - e^{-\lambda t})$ , et tend donc rapidement vers  $2/\lambda$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.
2. Quelle est l'espérance des temps d'inter-sauts  $S_k$  ? Commenter.

## 2 Comportement asymptotique et estimation

En écrivant  $N_t$  comme la somme de ses accroissements (indépendants), on peut établir facilement les comportements asymptotiques suivants pour les trajectoires d'un processus de Poisson simple.

**Proposition 3.** *Lorsque  $t$  tend vers l'infini, on a les convergences suivantes :*

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{p.s.} \lambda, \quad \sqrt{\frac{t}{\lambda}} \left( \frac{N_t}{t} - \lambda \right) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, 1).$$

**Exercice 4.** *Estimation de l'intensité.*

1. À l'aide d'un générateur aléatoire de votre choix, choisir une intensité  $\lambda > 0$  au hasard.
2. Générer alors une trajectoire d'un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  et proposer un estimateur  $\hat{\lambda}_t$  de cette intensité.
3. Proposer un intervalle de confiance  $I_t$  pour  $\lambda$  de niveau de confiance 95%.
4. Représenter sur un même graphique l'évolution temporelle de l'estimateur  $\hat{\lambda}_t$  et de l'intervalle de confiance  $I_t$ .

L'intensité du processus peut aussi naturellement être estimée à partir de l'observation des temps de sauts du processus. En effet, la loi des grands nombres et le théorème limite central appliqués à  $T_n = S_1 + \dots + S_n$  donnent

$$\frac{T_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \frac{1}{\lambda}, \quad \sqrt{n} \left( \lambda \frac{T_n}{n} - 1 \right) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, 1).$$

**Exercice 5.** *Estimation de l'intensité (le retour).*

1. À l'aide d'un générateur aléatoire de votre choix, choisir une intensité  $\lambda > 0$  au hasard.
2. Générer alors une trajectoire d'un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  jusqu'à son  $n$ -ième saut et proposer un estimateur  $\hat{\lambda}_n$  de cette intensité.
3. Proposer un intervalle de confiance  $I_n$  pour  $\lambda$  de niveau de confiance 95%.
4. Représenter sur un même graphique l'évolution temporelle de l'estimateur  $\hat{\lambda}_n$  et de l'intervalle de confiance  $I_n$ .

### 3 Quelques compléments

#### 3.1 Superposition et décomposition

**Proposition 4** (Superposition de deux processus de Poisson). *Si  $(M_t)_{t \geq 0}$  et  $(N_t)_{t \geq 0}$  sont deux processus de Poisson simples indépendants de paramètres respectifs  $\lambda$  et  $\mu$  alors la somme de processus  $(M_t + N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson simple de paramètre  $\lambda + \mu$ .*

**Exercice 6.** *Proposer une illustration de la proposition 4.*

**Proposition 5** (Décomposition d'un processus de Poisson). *Soit  $(N_t)_{t \geq 0}$  un processus de Poisson simple de paramètre  $\lambda$ . On construit les processus deux processus  $(N_t^1)_{t \geq 0}$  et  $(N_t^2)_{t \geq 0}$  de la façon suivante : à chaque saut (indépendamment des autres) du processus de base  $(N_t)_{t \geq 0}$ , on choisit de faire sauter  $(N_t^1)_{t \geq 0}$  avec probabilité  $p$  ou  $(N_t^2)_{t \geq 0}$  avec probabilité  $1 - p$ . Alors les processus  $(N_t^1)_{t \geq 0}$  et  $(N_t^2)_{t \geq 0}$  sont deux processus de Poisson simples indépendants d'intensité respectives  $p\lambda$  et  $(1 - p)\lambda$ .*

**Exercice 7.** *Écrire une fonction qui trace une trajectoire du processus de base  $(N_t)_{t \geq 0}$  et en déduit les trajectoires des sous-processus  $(N_t^1)_{t \geq 0}$  et  $(N_t^2)_{t \geq 0}$ .*

#### 3.2 Processus de Poisson composé

**Définition 2.** *Soient  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  et  $(Y_n)_{n \geq 0}$  une suite de v.a. i.i.d. de loi  $\nu$ , indépendante de la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$ . On pose  $T_n := S_1 + \dots + S_n$ . On appelle processus de Poisson composé d'intensité  $\lambda > 0$  et de loi de saut  $\nu$  le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  issu de zéro défini par*

$$X_t := \sum_{n \geq 0} Y_n \mathbb{1}_{T_n \leq t}.$$

**Remarque 1.** *Le processus de Poisson simple est un processus de Poisson composé où la loi des sauts est la mesure de Dirac  $\delta_1$ .*

**Exercice 8.** *Simuler une trajectoire de processus de Poisson composé d'intensité 1 et de loi de saut  $\mathcal{N}(0, 1)$ .*

**Proposition 6** (Loi d'une somme aléatoire). *Soit  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a. i.i.d. de fonction caractéristique  $\phi$  et soit  $N$  une v.a. à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , de fonction génératrice  $G$ , indépendante de la suite  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Alors, la somme aléatoire*

$$S = \mathbb{1}_{N \geq 1} \sum_{n=1}^N Y_n$$

*admet pour fonction caractéristique  $\phi_S(u) = G(\phi(u))$ .*

**Corollaire 1.** *Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Poisson composé d'intensité  $\lambda$  et de loi de saut  $\nu$  de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2 < +\infty$ . Alors, pour tout  $t \geq 0$  :*

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[N_t] \mathbb{E}[Y_1] = m\lambda t, \quad \text{var}(X_t) = \mathbb{E}[N_t] \text{var}(Y_1) + \text{var}(N_t) \mathbb{E}[Y_1]^2 = \lambda t \sigma^2 + \lambda t m^2.$$

**Exercice 9.** *Illustrer le corollaire en considérant différentes lois de saut.*