Un peu d'algèbre sur les matrices stochastiques

Exercice 1 *Carré de matrices orthogonales et matrices bistochastiques*
Soit n dans $\mathbb{N}^*$; on considère l'ensemble $D(n)$ des matrices bistochastiques, c'est-à-dire les matrices carrées réelles de taille n, à coefficients positifs (ou nuls) et dont la somme des coefficients sur chaque ligne comme sur chaque colonne vaut 1 :

$$D(n) := \left\{ M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \mid m_{ij} \geq 0, \forall (i,j) \in [\![1;n]\!],\ \sum_{k=1}^{n} m_{kj} = 1,\ \sum_{k=1}^{n} m_{ik} = 1 \right\}.$$

On considère l'application de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même d'élévation au carré coefficient par coefficient :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ & (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} & \mapsto & (m_{ij}^2)_{1\leq i,j\leq n}. \end{array}$$

Une matrice dans l'image directe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ par f est dite orthostochastique ; on note $\mathcal{O}(n) = f\left(\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\right)$ l'ensemble de ces matrices.

1. Montrer que $\mathcal{O}(n)$ est un ensemble compact, connexe par arcs.
2. Montrer que $\mathcal{O}(n)$ et $D(n)$ coïncident pour n égal 1 ou 2. Qu'en est-il pour n plus grand ?
   Indice : on pourra par exemple considérer la matrice $D_3 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. En déduire que $\mathcal{O}(n)$ n'est pas dense dans $D(n)$ pour n supérieur ou égal à 3.

Exercice 2 *Vers le théorème de Perron–Frobenius*
Soient $n \geq 2$ un entier et M une matrice carrée de taille $n \times n$ dont tous les coefficients sont strictement positifs et dont la somme des coefficients sur chaque ligne est constante égale à 1.

1. Montrer qu'il existe un vecteur ligne $v = (v_j)_{1\leq j\leq n}$ tel que $vM = v$ et que le vecteur $|v| := (|v_j|)_{1\leq j\leq n}$ vérifie aussi $|v|M = |v|$ et a toutes ses coordonnées strictement positives.
2. Montrer qu'il existe un unique vecteur ligne $m = (m_j)_{1\leq j\leq n}$ vérifiant $mM = m$, dont toutes les coordonnées sont strictement positives et dont la somme vaut 1.
3. On considère maintenant la matrice M^∞ dont toutes les lignes sont égales à m. Montrer que $MM^\infty = M^\infty M = M^\infty$.
4. On définit $c := \min_{i,j} M^\infty_{ij}/M_{ij} > 0$. Montrer que pour tout $k \geq 1$, on a

   $$\sup_{i,j} |M^k_{ij} - M^\infty_{ij}| \leq (1-c)^k.$$

   Indice : lorsque $0 < c < 1$, on pourra considèrer la matrice stochastique N définie par

   $$N := \frac{1}{1-c}(M - cM^\infty), \quad \text{de sorte que} \quad M - M^\infty = (1-c)(N - M^\infty).$$

5. Si $M = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ où $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$, déterminer le vecteur m.