Feuille d'exercices # 4 – Théorème d'arrêt

Exercice 1. *Un critère de finitude pour les temps d'arrêt*
Soit T un temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{\geq 0}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ un entier tels que pour tout $n \geq 0$, on a $\mathbb{P}(T \leq n + N | \mathcal{F}_n) > \varepsilon,\ p.s.$. Montrer que T est fini presque sûrement et que $\mathbb{E}[T] < +\infty$.

Exercice 2. *Une réciproque au théorème d'arrêt*
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite adaptée de variables aléatoires intégrables. Montrer que, si l'on a $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$ pour tout temps d'arrêt borné τ, alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

Exercice 3. *Autre version du théorème d'arrêt*
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale définie sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ et T un temps d'arrêt vérifiant $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$, $\mathbb{E}(|X_T|) < +\infty$ et $\mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_{T>n}) \to 0$ lorsque n tend vers l'infini.

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|X_T| \mathbb{1}_{T>n}) = 0$.
2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|X_{T\wedge n} - X_T|) = 0$.
3. En déduire que $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.

Exercice 4. *Ruine du joueur et identité de Wald*
Soient a et b des entiers strictement positifs et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mu := p\delta_1 + q\delta_{-1}$ où $0 < p, q < 1$ et $p + q = 1$. On pose $S_0 := 0$ et $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ pour $n \geq 1$ et on désigne par $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ la filtration naturelle associée. On suppose dans un premier temps que $p \neq q$.

1. Montrer que les suites $W_n := S_n - (2p-1)n$ et $M_n = (q/p)^{S_n}$ issues de 0 et 1 respectivement sont des martingales par rapport $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.
2. Soit $T = \inf\{n \geq 0,\ S_n \notin]-a, b[\}$. Montrer que T est un temps d'arrêt fini presque sûrement.
3. En déduire les valeurs de $\mathbb{P}(S_T = -a)$, $\mathbb{P}(S_T = b)$ et $\mathbb{E}(T)$.

On suppose maintenant que $p = q = 1/2$, de sorte la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

4. Montrer que le temps T est toujours fini presque sûrement.
5. Montrer que $\mathbb{E}(S_T) = 0$ et en déduire les expressions de $\mathbb{P}(S_T = -a)$ et $\mathbb{P}(S_T = b)$.

On cherche enfin à expliciter $\mathbb{E}[T]$ dans le cas symétrique. Soit ϕ la transformée de Laplace de μ i.e. $\phi(\lambda) = \cosh(\lambda) = pe^{\lambda} + qe^{-\lambda}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. Pour $n \geq 0$, on pose $Y_n := e^{\lambda S_n}/\phi(\lambda)^n$. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.
7. Montrer que $\mathbb{E}(e^{\lambda S_T} \phi(\lambda)^{-T}) = 1$.
8. Retrouver le fait que $\mathbb{E}(S_T) = 0$ à partir de la dernière égalité.
9. Pour $\alpha > 1$, calculer $\mathbb{E}[\alpha^{-T} \mathbb{1}_{S_T=-a}]$ et $\mathbb{E}[\alpha^{-T} \mathbb{1}_{S_T=b}]$. En déduire $\mathbb{E}(T|S_T)$ et $\mathbb{E}[T]$.

Exercice 5. *La martingale de Labouchère*
Dans le cadre d'un jeu de pile ou face équilibré, on considère la stratégie de mise suivante, dite "martingale de Labouchère". On se donne à l'avance une liste de nombres $L = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec pour objectif de gagner $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ euros "à coup sûr" en un temps fini. Voici la stratégie :

- avant chaque tirage de pile ou face, on mise la somme des nombres extrémaux de la liste, par exemple la mise initiale est de $x_1 + x_n$ euros ;
- si l'on gagne le tirage de pile ou face, on empoche la mise et on actualise la liste en supprimant les deux nombres extrémaux, par exemple la liste devient $\{x_2, \dots, x_{n-1}\}$ si l'on gagne au premier tirage ;
- si l'on perd le tirage de pile ou face, on perd la mise et on actualise la liste en ajoutant à la liste initiale la mise actuelle. Par exemple, si l'on perd au premier tirage de pile ou face, la liste devient $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1} := x_1 + x_n\}$.
- on s'arrête de jouer lorsque la liste est vide ;
- si la liste contient un seul élément x_k, on mise cet élément. Si l'on gagne le tirage de pile ou face, on empoche x_k et on s'arrête, sinon la liste est actualisée à $\{x_k, x_k\}$.

Voici un exemple de partie si l'on joue avec la liste $L = \{1, 2, 4\}$ et si le début de la suite de pile ou face est $PGPGPG$ (P = perdu, G = gagné). Le premier argument désigne la somme totale que l'on a gagnée / perdue, le second est la liste actualisée :

$$\begin{array}{ccccccc} (0, \{1,2,4\}) & \xrightarrow{P} & (-5, \{1,2,4,5\}) & \xrightarrow{G} & (+1, \{2,4\}) & \xrightarrow{P} & (-5, \{2,4,6\}) \\ & & & & & & \downarrow G \\ & & (7, \{\emptyset\}) & \xleftarrow{G} & (-1, \{4,4\}) & \xleftarrow{P} & (+3, \{4\}) \end{array}$$

1. Montrer que presque sûrement, la martingale de Labouchère permet effectivement de gagner $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ euros en un temps aléatoire T qui vérifie $\mathbb{E}[T] < +\infty$.
2. Si X_k désigne la somme gagnée / perdue après k tirages de pile ou face, calculer $\mathbb{E}[\inf_{k \geq 1} X_{T \wedge k}]$.