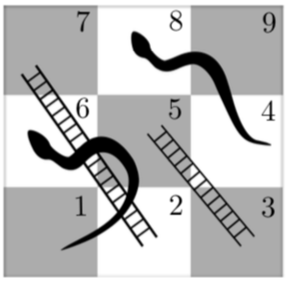
Feuille d'exercices #3

Exercice 1 *Serpents et échelles*



On joue au jeu suivant : un joueur débute à la case 1 et à chaque temps n, lance une pièce équilibrée. Selon le résultat, il avance d'une ou deux cases sur le plateau de jeu. S'il arrive au pied d'une échelle, il grimpe en haut de l'échelle ; s'il arrive sur la tête d'un serpent, il descend à la queue. Le but est d'atteindre la case 9.

1. Combien de tours en moyenne doit-on jouer pour terminer le jeu ?
2. Quelle est la probabilité qu'un joueur ayant atteint la case 5 termine le jeu sans retomber à la case 1 ?

Exercice 2 *Chaîne de naissance et de mort*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $X_0 := a \in \mathbb{N}^*$, et pour $n \geq 0$,

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1} = k+1 | X_n = k) = p_k, \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = k-1 | X_n = k) = q_k, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_k + q_k = 1, \\ p_k > 0, q_k > 0, \end{cases} \quad \text{pour} \ \ k \geq 1,$$

et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = 1$. On cherche à exprimer la probabilité d'extinction c'est-à-dire $h_i := \mathbb{P}_i(\exists n, X_n = 0)$. Pour tout $k \geq 1$, on suppose que $p_k > 0$ et on pose $\gamma_k := \frac{q_k q_{k-1} \cdots q_1}{p_k p_{k-1} \cdots p_1}$.

1. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
2. Suivant que $\sum_{k\geq 1} \gamma_k$ est finie ou non, exprimer h_i.
3. Déterminer les mesures réversibles pour la chaîne X_n.
4. À quelle condition existe-t-il une mesure de probabilité réversible ?

Exercice 3 *Entomologie*
Une puce saute chaque seconde au hasard d'un sommet d'un triangle à un autre, indépendamment et uniformément. Une tique, quant à elle, choisit deux fois plus souvent de sauter dans le sens direct que dans le sens indirect. Quelles sont les mesures réversibles (resp. invariantes) des deux dynamiques ? Dans les deux cas, calculer la probabilité que l'animal se retrouve à son sommet de départ au bout de n sauts.

Exercice 4 *Une chaîne à trois états*
On considère une chaîne de Markov d'espace d'états $E := \{1, 2, 3\}$ et de matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Quels sont les états récurrents ? Transients ? Les lois stationnaires ?
2. Pour $x \in E$, on note T_x le temps d'atteinte de x. Calculer $\mathbb{E}_x[T_x]$.
3. Calculer la période de chaque état. Pour tout couple $(x, y) \in E^2$, calculer la limite de $Q^n(x, y)$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 5 *Réversibilité modulo n*
On fixe $n \geq 2$ et on considère la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dont la matrice de transition est donnée par $Q(i,i+1) = p$, $Q(i,i-1) = 1-p$ où $0 < p < 1$. Montrer que la chaîne est réversible si et seulement si $p = 1/2$.

Exercice 6 *La chaîne serpent*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur E de transition Q. Pour $\ell \geq 1$, on définit une nouvelle suite à valeurs dans $F = E^{\ell+1}$ en posant $Y_n := (X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+\ell})$.

1. Montrez que c'est une chaîne de Markov et préciser sa matrice de transition.
2. Montrez que si $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible, il en est de même pour $(Y_n)_{n\geq 0}$ si on restreint l'espace d'état à $\widetilde{F} = \{(i_0, \ldots, i_\ell) \in E^{\ell+1},\ Q(i_0,i_1)Q(i_1,i_2)\ldots Q(i_{\ell-1},i_\ell) > 0\}$.
3. Montrez que si $(X_n)_{n\geq 0}$ a une distribution stationnaire π, alors $(Y_n)_{n\geq 0}$ a aussi une distribution stationnaire.

Exercice 7 *Chaîne pressée*
Soient E un ensemble au plus dénombrable, Q une matrice de transition sur E et $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov canonique associée. On suppose que pour tout $x \in E$, on a $Q(x,x) < 1$. On définit alors une suite de variables aléatoires à valeurs entières $\tau_0 := 0$, $\tau_1 := \inf\{n \geq 1, X_n \neq X_0\}$ et pour $n \geq 1$, $\tau_{n+1} := \tau_n + \tau_1 \circ \theta_{\tau_n}$.

1. Montrer que τ_1 est un temps d'arrêt et que pour tout $x \in E$, τ_1 est fini $\mathbb{P}_x-$presque sûrement. Calculer la loi de τ_1 ainsi que celle de X_{τ_1}.
2. Donner une autre façon de définir la suite $(\tau_n)_{n\geq 0}$ et montrer que les τ_n sont des temps d'arrêt.
3. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 0} := (X_{\tau_n})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{\tau_n})$. Quelle est sa matrice de transition ?
4. On suppose que (X_n) est irréductible récurrente de mesure invariante μ. Montrer que la chaîne (Y_n) est également irréductible récurrente et que $\pi(y) := (1 - Q(y,y))\mu(y)$ est une mesure invariante pour cette dernière.

Exercice 8 *Estimation des probabilités de transition*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur E, irréductible récurrente positive, de distribution stationnaire π.

1. Quelle est la loi invariante de la chaîne $((X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+\ell}))_{n\geq 0}$?
2. En déduire que si $g : E^{\ell+1} \to \mathbb{R}_+$ est telle que $\mathbb{E}_\pi[g(X_0, \ldots, X_\ell)] < +\infty$, alors pour toute loi initiale μ, $\mathbb{P}_\mu-$presque sûrement, lorsque n tend vers l'infini, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(X_k, X_{k+1}, \ldots, X_{k+\ell}) \longrightarrow \mathbb{E}_\pi[g(X_0, \ldots, X_\ell)].$$

On suppose que Q et π sont inconnues. On souhaite estimer les probabilités de transition $Q(i,j)$ à l'aide de la seule observation d'une trajectoire $(X_n(\omega))_{n\geq 0}$.

3. Soit $(i,j) \in E^2$, déterminer les limites presque sûre lorsque n tend vers l'infini de

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k=i\}} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k=i, X_{k+1}=j\}}.$$

4. En déduire un estimateur consistant de la probabilité de transition $Q(i,j)$.