Feuille d'exercices # 3 – Convergence des martingales

Exercice 1. *Martingale et suite récurrente*
Soient a un réel et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $X_0 := a$ et on définit par récurrence $X_{n+1} := U_{n+1} + (1-U_{n+1})X_n^2$ pour $n \geq 0$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la filtration naturelle associée à la suite $(X_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale relativement à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. On suppose maintenant que $a \in [0,1]$. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers une variable X_∞ que l'on précisera.

Exercice 2. *Un exemple de martingale qui converge p.s. vers $+\infty$*
Soit $(X_n)_{n\geq 2}$ une suite de variables indépendantes telles que

$$\mathbb{P}(X_n = -n^2) = \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(X_n = \frac{n^2}{n^2-1}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

On pose $S_n := X_2 + ... + X_n$ pour $n \geq 2$. Montrer que $(S_n)_{n\geq 2}$ est une martingale relativement à la filtration engendrée par les $(X_n)_{n\geq 2}$ et qu'elle converge p.s. vers $+\infty$.

Exercice 3. *Un exemple de martingale qui converge p.s. mais qui n'est pas bornée dans $\mathbb{L}^1$*
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Soit T une variable indépendante des $(X_i)_{i\geq 1}$ telle que $\mathbb{P}(T = n) = C/n^\alpha$ pour $n \geq 1$ avec $\alpha > 1$ et $C = (\sum_{n\geq 1} n^{-\alpha})^{-1}$. On pose

$$S_n := \sum_{k=1}^{n\wedge T} X_k, \quad n \geq 1.$$

Montrer que S_n est une martingale relativement à la filtration $\mathcal{F}_n := \sigma(T, X_1, ..., X_n)$, $n \geq 1$, qu'elle converge p.s., mais que pour α bien choisi, elle n'est pas bornée dans $\mathbb{L}^1$.

Exercice 4. : *Une série aléatoire*
Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$ et $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ une suite de réels. Montrer que si $\sum_{i\geq 1} \alpha_i^2 < \infty$ alors la série $\sum_{i\geq 1} \alpha_i X_i$ converge presque sûrement.

Exercice 5. *Loi du zéro un de Kolmogorov via les martingales*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On définit :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n &:= \sigma(X_1, \ldots, X_n), & \mathcal{F}_\infty &:= \sigma\left(\textstyle\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n\right), \\ \mathcal{F}^n &:= \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots), & \mathcal{F}^\infty &:= \textstyle\bigcap_{n\geq 1} \mathcal{F}^n. \end{aligned}$$

Soit A un évènement asymptotique, i.e. $A \in \mathcal{F}^\infty$. En utilisant la martingale fermée $(M_n)_{n\geq 1}$ définie par $M_n := \mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n]$, montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 6. *Fonctions intégrables et fonctions étagées*
Soit f une fonction mesurable et intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $[0,1]$. On souhaite retrouver le résultat suivant : il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions étagées qui converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1([0,1], d\lambda)$ vers f. Soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et pour tout entier naturel n : $X_n := 2^{-n}\lfloor 2^n X \rfloor$. On pose $Y := f(X)$ et $Y_n := \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ où $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que X_n converge vers X. Quelle signification donner à $2^n(X_n - X_{n-1})$?
2. Montrer que Y_n converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$. Identifier sa limite.
3. Expliciter Y_n et conclure.

Exercice 7. : *Concentration sur 0 et 1*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$, $n \geq 0$. On suppose que $X_0 = a$ presque sûrement avec $a \in [0,1]$ et que pour $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \Big| \mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{1 + X_n}{2} \Big| \mathcal{F}_n\right) = X_n.$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \geq 1$ vers une variable aléatoire que l'on note X_∞.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 0$:
$$\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] = \frac{1}{4}\mathbb{E}[X_n(1 - X_n)].$$
3. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[X_\infty(1 - X_\infty)]$ puis la loi de X_∞.

Exercice 8. : *Martingale rétrograde et loi des grands nombres*
On rappelle qu'une filtration rétrograde est une famille $(\mathcal{F}_n)_{n\in -\mathbb{N}}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ indexée par les entiers négatifs et telle que, pour tous $m, n \in -\mathbb{N}$, on a $n \leq m \implies \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m$. On notera $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n\in -\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ qui est encore une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On rappelle qu'un processus $(X_n)_{n\in -\mathbb{N}}$ indexé par les entiers négatifs est une martingale rétrograde relativement à la filtration rétrograde $(\mathcal{F}_n)_{n\in -\mathbb{N}}$ si

1. X_n est $\mathcal{F}_n-$mesurable et $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ pour tout $n \in -\mathbb{N}$;
2. pour tout couple $m, n \in -\mathbb{N}$, $n \leq m \implies X_n = \mathbb{E}[X_m|\mathcal{F}_n]$.

D'après le cours, on a le résultat suivant :

Théorème. *Si $(X_n)_{n\in -\mathbb{N}}$ est une martingale rétrograde par rapport à la filtration rétrograde $(\mathcal{F}_n)_{n\in -\mathbb{N}}$, alors lorsque n tend vers moins l'infini, la suite (X_n) converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers $X_{-\infty} = \mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_{-\infty}]$.*

Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées et admettant un moment d'ordre un i.e. $\mathbb{E}[\xi_n] < \infty$. On note $S_n := \xi_1 + \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $X_{-n} := S_n/n$ et on introduit la filtration rétrograde $\mathcal{F}_{-n} := \sigma(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots) = \sigma(S_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)$.

1. Montrer que X_{-n} est une martingale rétrograde relativement à $(\mathcal{F}_n)_{n\in -\mathbb{N}}$.
2. À l'aide de la loi du zéro-un, montrer que la tribu $\mathcal{F}_{-\infty}$ est triviale.
3. En déduire que lorsque n tend vers l'infini, S_n/n converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers la moyenne $\mathbb{E}[\xi_1]$.